

МОДЕЛИ С НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ ВОЛАТИЛЬНОСТЬЮ

*Г.И. Белявский¹, Н.В. Данилова¹*¹Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

В статье рассматриваются модели, в которых волатильность является одной из возможных траекторий. В качестве примера модели с определенной волатильностью рассматривается модель Блэка – Шоулса. В качестве примера моделей с неопределенной волатильностью рассматриваются три модели: модель Хестона со случайными траекториями, а также две модели с детерминированными траекториями из доверительного множества возможных траекторий. Предложены три вычислительных метода нахождения интервала справедливых цен Европейского опциона. Первый метод основан на решении вязкостных уравнений с использованием разностных схем. Вторым является метод Монте-Карло, который основан на моделировании исходного процесса стоимости акции. Третьим является метод деревьев, который основан на аппроксимации исходной непрерывной модели дискретной моделью и получением рекуррентных формул на бинарном дереве для расчета верхней и нижней цен. Приведены результаты расчетов с использованием перечисленных методов. Показано, что интервалы справедливых цен, полученные с использованием трех численных методов, практически совпадают.

Ключевые слова: модель Блэка – Шоулса; модель Хестона; неопределенная волатильность; вязкостное уравнение; опцион; справедливая цена.

Введение

В 1965 году П. Самуэльсоном в работе [1] была предложена модель геометрического броуновского движения. Именно она легла в основу модели Блэка – Мертона – Шоулса, с которой связана знаменитая формула Блэка и Шоулса для рациональной стоимости стандартного опциона-колл европейского типа, полученная в 1973 году в работах [2, 3]. Под рациональной стоимостью понимается минимальная величина начального капитала, которая дает продавцу опциона возможность построения хеджирующего портфеля. Оригинальный вывод формулы Блэка – Шоулса основан на решении фундаментального уравнения с краевым условием. Поскольку полученное фундаментальное уравнение относится к уравнениям типа Фейнмана – Каца [4], оно может быть решено стандартной техникой решения таких уравнений, а именно, сведением к уравнению теплопроводности путем введения новых переменных. Мартингальный вывод формулы Блэка – Шоулса основан на том, что в рассматриваемой модели (B,S)-рынка существует единственная мартингальная мера. Это определяет безарбитражность рассматриваемой модели и дает возможность рассчитывать рациональную стоимость опциона как математическое ожидание по мартингальной мере от дисконтированного финансового обязательства. Цена, полученная в результате оригинального или мартингального подходов, является справедливой ценой, так как если назначаемая цена опциона меньше полученной цены, то продавец опциона не сможет выполнить свои контрактные обязательства; а если назначаемая цена опциона больше полученной цены, то продавец заведомо будет иметь чистый доход.

Модель Блэка – Шоулса – Мертона имеет ряд недостатков. В частности, в ней предполагается, что параметры модели (процентная ставка, снос и волатильность)

являются постоянными. В этом отношении следует отметить так называемый смайл-эффект [4], который не объясняется стандартной (B,S)-моделью. Суть смайл-эффекта заключается в следующем. Формула Блэка – Шоулса дает явную зависимость рациональной стоимости опциона $C(\sigma, T, K)$ от волатильности σ , момента исполнения T и контрактной цены K . Можно, однако, обратиться к реально существующим на финансовых рынках стоимостям этих опционов $\hat{C}(T, K)$ с заданными T и K и сравнить их с теоретическими значениями. Найдем $\hat{\sigma}(T, K)$ как решение уравнения $C(\sigma, T, K) = \hat{C}(T, K)$. Величина $\hat{\sigma}(T, K)$ называется предполагаемой волатильностью. При фиксированном K величина $\hat{\sigma}(T, K)$ меняется с изменением T . При фиксированном T величина $\hat{\sigma}(T, K)$ также меняется с изменением K , будучи выпуклой функцией (это и объясняет название смайл-эффект). Смайл-эффект является тем фактом, который не объясняется стандартной (B,S)-моделью, что привело к разнообразным ее обобщениям и усовершенствованиям.

В 1993 году в работе [5] была предложена модель Хестона. В модели Хестона цена акции и волатильность описываются стохастическими дифференциальными уравнениями с винеровскими процессами W^1 и W^2 такими, что $dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt$. В работе [6] приведены различные разностные схемы для модели Хестона. Недостатком данной модели является неединственность мартингальной меры, что, в свою очередь, означает отсутствие справедливой стоимости опциона. Интервал справедливых цен заменяет справедливую цену в этом случае. Поскольку волатильность в модели Хестона – неограниченная величина, то интервал справедливых стоимостей может оказаться непригодным при выборе начальных инвестиций. Например, при совпадении страйка европейского опциона колл с начальной стоимостью рискованного актива и при постоянной стоимости безрискового актива интервал справедливых стоимостей будет иметь вид: $[0, S_0]$, S_0 – начальная стоимость рискованного актива. Очевидно, что данный интервал совершенно непригоден для принятия решения. В настоящей статье рассматривается реализация модели Хестона, позволяющая для заданной траектории волатильности получать единственную мартингальную меру, а значит, и единственную стоимость опциона, зависящую от траектории. Такая параметризация мартингальных мер позволяет использовать метод Монте-Карло для вычисления интервала справедливых стоимостей. Другим средством вычисления интервала справедливых цен является вычисление с заданной вероятностью доверительного множества траекторий волатильности, что, естественно, приводит к моделям с неопределенной волатильностью. Поэтому основной целью данной статьи является продолжение и развитие моделей и методов, изложенных в работе [7].

Модели неопределенной волатильности впервые были изучены в [8–14]. В работах [8, 12] неопределенная волатильность представляет собой семейство детерминированных траекторий. В данной статье рассматривается обобщение модели Блэка – Шоулса, заключающееся в том, что волатильность σ заменяется на интервал с границами, не зависящими от времени ($[\underline{\sigma}, \bar{\sigma}]$) и зависящими от времени ($[\underline{\sigma}_t, \bar{\sigma}_t]$). В результате получается неполный рынок, а фундаментальное уравнение Блэка – Шоулса заменяется на два уравнения, не имеющих аналитических решений. Полученные уравнения называются вязкостными уравнениями Гамильтона – Якоби – Беллмана [15], а их численные решения определяют интервал справедливых цен. В статье предложены три вычислительных метода нахождения интервала справедливых цен. Первый метод основан на решении вязкостных уравнений с использованием разностных схем. Вторым является метод Монте-Карло, который основан на моделировании исходного процесса стоимости акции. В связи с этим следует отметить алгоритмы генерации зависимых нормальных и бинарных случайных величин. Третьим является метод деревьев, который основан на аппроксимации исходной непрерывной модели дискретной моделью и получением рекуррентных формул на бинарном дереве для

расчета верхней и нижней цен. В статье присутствуют результаты расчетов интервала справедливых цен с использованием трех вышеперечисленных методов. Совпадение полученных результатов является, по мнению авторов, хорошей верификацией предложенных методов.

1. Модель Блэка – Шоулса

Рассмотрим модель Блэка – Шоулса [4], в которой стохастический дифференциал дисконтированного процесса стоимости акции $\frac{S_t}{B_t}$, а также дифференциал банковского счета имеют вид:

$$d\frac{S_t}{B_t} = \frac{S_t}{B_t}\sigma dW_t, \quad dB_t = B_t r dt. \quad (1)$$

Из (1) следует, что процесс $\frac{S_t}{B_t}$ является мартингалом относительно исходной меры P . Процесс $\frac{S_t}{B_t}$ можно записать в виде $\frac{S_t}{B_t} = \frac{S_0}{B_0} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t\right)$, откуда следует, что $S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$. Обозначим

$$Y_t = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t, \quad Y_0 = 0. \quad (2)$$

Из (2) следует, что $dY_t = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW_t$. Введем функцию $U(t, Y_t)$, которая выражается через платежное обязательство $f(Y_T)$ согласно следующей формуле: $\exp(-rt)U(t, Y_t) = E(\exp(-rT)f(Y_T)/F_t)$. Введем функцию $\tilde{U}(t, Y_t) = \exp(-rt)U(t, Y_t)$, из формулы Ито [4] следует, что $d\tilde{U} = \exp(-rt)\left(\left(-rU + U'_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)U'_y + \frac{\sigma^2}{2}U''_{yy}\right)dt + U'_y\sigma dW\right)$.

В силу того, что процесс $E(\exp(-rT)f(Y_T)/F_t)$ является мартингалом по исходной мере P , коэффициент при dt в выражении для $d\tilde{U}$ должен быть равен 0, откуда следует уравнение теплопроводности

$$U'_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)U'_y + \frac{\sigma^2}{2}U''_{yy} - rU = 0 \quad (3)$$

с краевым условием $U(T, y) = f(y)$.

Приведем процесс Y_n , аппроксимирующий процесс Y_t из (2):

$$\Delta Y_n = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)h + \sigma\sqrt{h}\varepsilon_n, \quad h = \frac{T}{N}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (4)$$

Последовательность $(\varepsilon_n)_{n=1}^N$ состоит из независимых стандартных нормальных случайных величин, N – число разбиений интервала $[0, T]$. В данной модели мартингальная мера не является единственной.

Пользуясь приемом, изложенным в [16], приведем бинарную модель, аппроксимирующую модель (4):

$$\Delta \bar{Y}_n = \sigma\sqrt{h}\delta_n, \quad n = 1, \dots, N. \quad (5)$$

Последовательность $(\delta_n)_{n=1}^N$ состоит из независимых радамехеровских случайных величин, принимающих значения 1 и -1 , вероятность $p = P(\delta_n = 1) = \frac{1}{2} + \frac{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \sqrt{h}}{2\sigma}$. Для бинарной модели мартингальная мера единственная; введем функцию $U(n, y) = \frac{1}{(1 + rh)^{N-n}} E(f(\bar{Y}_N) / \bar{Y}_n = y)$. Для этой функции справедливы следующие рекуррентные формулы:

$$U(n-1, y) = \frac{1}{1 + rh} E(U(n, y + \Delta \bar{Y}_n) / \bar{Y}_{n-1} = y) = \frac{1}{1 + rh} \left(pU(n, y + \sigma\sqrt{h}) + (1-p)U(n, y - \sigma\sqrt{h}) \right), U(N, \bar{Y}_N) = f(\bar{Y}_N). \quad (6)$$

Цена европейского опциона $U(0, 0)$ с платежным обязательством $f(Y_T) = \max(S_0 \exp(Y_T) - K, 0)$ может быть также рассчитана с помощью формулы Блэка – Шоулса:

$$U(t, Y_t) = S_0 \exp(Y_t) \Phi \left(\frac{\ln \frac{S_0}{K} + Y_t + (T-t) \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right) - K \exp(-r(T-t)) \Phi \left(\frac{\ln \frac{S_0}{K} + Y_t + (T-t) \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right), \quad (7)$$

$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$ – функция Лапласа.

Еще одним способом вычисления цены европейского опциона $U(0, 0)$ с платежным обязательством $f(Y_T)$ является метод Монте-Карло:

$$U(t, Y_t) \approx \frac{\exp(-r(T-t))}{M} \sum_{i=1}^M f\left(Y_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}t\varepsilon_i\right), \quad (8)$$

M – количество экспериментов, $(\varepsilon_i)_{i=1}^M$ – последовательность независимых стандартных нормальных случайных величин.

Пример 1. Пусть $r = 0,1, \sigma = 0,05, S_0 = 5, T = 1, M = 1000$. В табл. 1 приведены значения цены европейского опциона $U(0, 0)$ с платежным обязательством $f(Y_T) = \max(S_0 \exp(Y_T) - K, 0)$, рассчитанные с помощью решения краевой задачи (3), применения рекуррентных формул (6), а также с использованием формулы Блэка – Шоулса (7) и метода Монте-Карло (8).

На рис. 1 приведен график зависимости значений $U(0, 0)$ от N при $K = 5$ для рекуррентных формул, из которого следует, что параметр N достаточно взять равным 20. На рис. 2 приведен график зависимости значений $U(0, y)$ от y при $K = 5$ для краевой задачи.

Таблица 1

Зависимость справедливой цены от контрактной цены в модели Блэка – Шоулса

| К | Решение краевой задачи | Формула Блэка – Шоулса | Метод Монте-Карло | Рекуррентные формулы на бинарном дереве |
|---|------------------------|------------------------|-------------------|---|
| 1 | 4,0948 | 4,0952 | 4,0909 | 4,0949 |
| 2 | 3,1895 | 3,1903 | 3,1860 | 3,1899 |
| 3 | 2,2842 | 2,2855 | 2,2812 | 2,2848 |
| 4 | 1,3790 | 1,3807 | 1,3763 | 1,3797 |
| 5 | 0,4765 | 0,4778 | 0,4742 | 0,4767 |

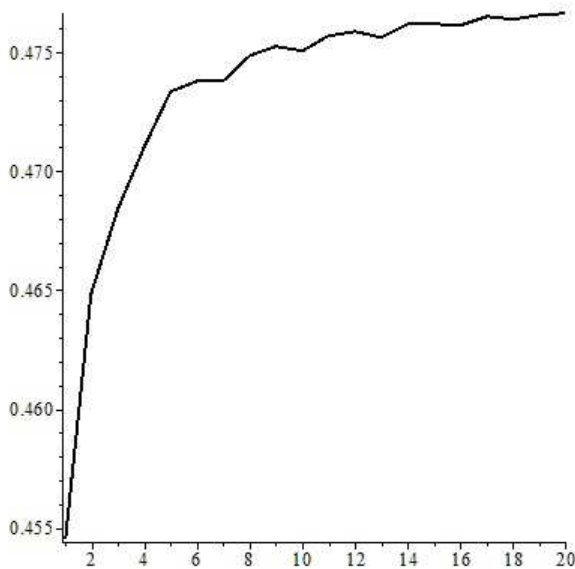


Рис. 1. Зависимость значений $U(0, 0)$ от N в модели Блэка – Шоулса для рекуррентных формул

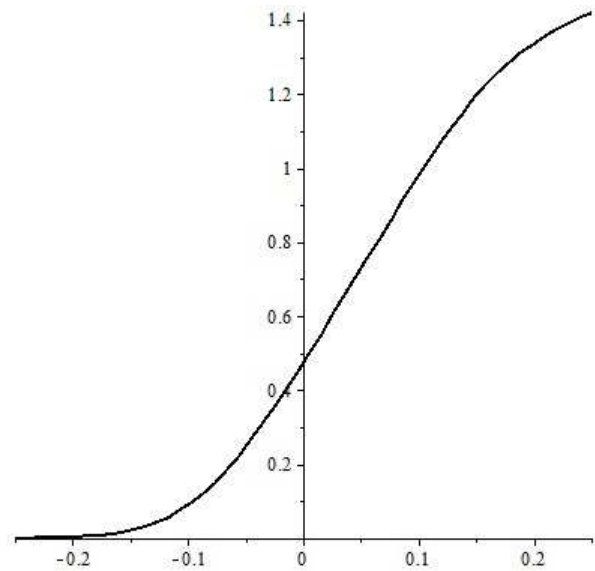


Рис. 2. Зависимость значений $U(0, y)$ от y в модели Блэка – Шоулса для краевой задачи

2. Модель Хестона

Рассмотрим реализацию модели Хестона [5], в которой стохастический дифференциал дисконтированного процесса стоимости акции $\frac{S_t}{B_t}$ имеет вид:

$$d\frac{S_t}{B_t} = \frac{S_t}{B_t} \sqrt{V_t} dW_t^1. \quad (9)$$

Из (9) следует, что процесс $\frac{S_t}{B_t}$ является мартингалом относительно исходной меры P . Процесс $\frac{S_t}{B_t}$ можно записать в виде:

$$\frac{S_t}{B_t} = \frac{S_0}{B_0} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t V_\tau d\tau + \int_0^t \sqrt{V_\tau} dW_\tau^1\right),$$

откуда следует, что $S_t = S_0 \exp \left(rt - \frac{1}{2} \int_0^t V_\tau d\tau + \int_0^t \sqrt{V_\tau} dW_\tau^1 \right)$. Обозначим

$$Y_t = rt - \frac{1}{2} \int_0^t V_\tau d\tau + \int_0^t \sqrt{V_\tau} dW_\tau^1, Y_0 = 0. \quad (10)$$

Отсюда следует, что $dY_t = \left(r - \frac{V_t}{2} \right) dt + \sqrt{V_t} dW_t^1$. Предположим, что волатильность является процессом квадратного корня:

$$dV_t = k(\theta - V_t) dt + \sigma \sqrt{V_t} dW_t^2. \quad (11)$$

Процессы W_t^1 и W_t^2 являются винеровскими с $dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt$. Введем функцию $U(t, Y_t, V_t)$, которая выражается через платежное обязательство $f(Y_T)$ согласно следующей формуле: $\exp(-rt) U(t, Y_t, V_t) = E \left(\exp(-rT) f(Y_T) / F_t^{Y,V} \right)$. Введем функцию $\tilde{U}(t, Y_t, V_t) = \exp(-rt) U(t, Y_t, V_t)$, тогда $d\tilde{U} = \exp(-rt) \left(\left(-rU + U'_t + \left(r - \frac{V}{2} \right) U'_y + k(\theta - V) U'_v + \frac{V}{2} U''_{yy} + \frac{\sigma \sqrt{V}}{2} U''_{vv} + U''_{yv} V \sigma \rho \right) dt + U'_y \sqrt{V} dW^1 + U'_v \sigma \sqrt{V} dW^2 \right)$. В силу того, что процесс $E \left(\exp(-rT) f(Y_T) / F_t^{Y,V} \right)$ является мартингалом по исходной мере P , коэффициент при dt в выражении для $d\tilde{U}$ должен быть равен 0, откуда следует уравнение

$$-rU + U'_t + \left(r - \frac{V}{2} \right) U'_y + k(\theta - V) U'_v + \frac{V}{2} U''_{yy} + \frac{\sigma \sqrt{V}}{2} U''_{vv} + U''_{yv} V \sigma \rho = 0 \quad (12)$$

с краевым условием $U(T, y, v) = f(y)$. Цена опциона $U(0, 0, v_0)$. Приведем дискретную модель, аппроксимирующую модель Хестона:

$$\begin{cases} \Delta Y_n = \left(r - \frac{V_{n-1}}{2} \right) h + \sqrt{V_{n-1}} h \varepsilon_n^1, \\ \Delta V_n = k(\theta - V_{n-1}) h + \sigma \sqrt{V_{n-1}} h \varepsilon_n^2, \\ Y_0 = 0, V_0 = v_0, n = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (13)$$

Последовательности $(\varepsilon_n^1)_{n=1}^N$ и $(\varepsilon_n^2)_{n=1}^N$ состоят из нормально распределенных случайных величин с $E\varepsilon_n^1 = 0, E\varepsilon_n^2 = 0, E(\varepsilon_n^1)^2 = 1, E(\varepsilon_n^2)^2 = 1, E(\varepsilon_n^1 \varepsilon_n^2) = \rho$. Пользуясь приемом, изложенным в [16], приведем бинарную модель, аппроксимирующую модель (13):

$$\begin{cases} \Delta \bar{Y}_n = \sqrt{V_{n-1}} h \delta_n^1, \\ \Delta \bar{V}_n = \sigma \sqrt{V_{n-1}} h \delta_n^2, \\ \bar{Y}_0 = 0, \bar{V}_0 = v_0, n = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (14)$$

Последовательности $(\delta_n^1)_{n=1}^N$ и $(\delta_n^2)_{n=1}^N$ состоят из независимых радамахеровских случайных величин, принимающих значения 1 и -1, вероятности $p_1 = P(\delta_n^1 = 1) =$

$$\frac{1}{2} + \frac{\left(r - \frac{\bar{V}_{n-1}}{2} \right) \sqrt{h}}{2\sqrt{V_{n-1}}}, p_2 = P(\delta_n^2 = 1) = \frac{1}{2} + \frac{k(\theta - \bar{V}_{n-1}) \sqrt{h}}{2\sigma \sqrt{V_{n-1}}}, \text{cov}(\delta_n^1, \delta_n^2) = \rho.$$

Таблица 2

Зависимость справедливой цены от контрактной цены в модели Хестона

| К | Решение краевой задачи | Метод МК, аппроксимация бинарными с.в. | Метод МК, аппроксимация нормальными с.в. |
|---|---------------------------|--|--|
| 1 | 4,0747 | 4,0844 | 4,0980 |
| 2 | 3,1718 | 3,1795 | 3,1932 |
| 3 | 2,2853 | 2,2763 | 2,2883 |
| 4 | 1,4619 | 1,4332 | 1,4037 |
| 5 | 0,7617 | 0,7604 | 0,7106 |

Введем функцию $U(n, y, v) = \frac{1}{(1 + rh)^{N-n}} E(f(\bar{Y}_N) / \bar{Y}_n = y, \bar{V}_n = v)$. Цена опциона

$U(0, 0, v_0) = \frac{1}{(1 + rh)^N} E(f(\bar{Y}_N) / \bar{Y}_0 = 0, \bar{V}_0 = v_0)$ может быть рассчитана с помощью метода Монте-Карло. Для дискретной аппроксимации (13) необходимо в каждом эксперименте генерировать случайные величины $\varepsilon_n^1, \varepsilon_n^2$ согласно следующему правилу. Сначала генерируются независимые, стандартные нормальные случайные величины $\bar{\varepsilon}_n^1, \bar{\varepsilon}_n^2$. Затем $\varepsilon_n^1 := \bar{\varepsilon}_n^1, \varepsilon_n^2 := \bar{\varepsilon}_n^2 \rho + \bar{\varepsilon}_n^2 \sqrt{1 - \rho^2}$. Для дискретной аппроксимации (14) необходимо в каждом эксперименте генерировать случайные величины δ_n^1, δ_n^2 согласно следующему правилу. Сначала генерируется случайная величина δ_n^1 с вероятностью

$p_1 = P(\delta_n^1 = 1) = \frac{1}{2} + \frac{\left(r - \frac{\bar{V}_{n-1}}{2}\right) \sqrt{h}}{2\sqrt{\bar{V}_{n-1}}}$. Если $\delta_n^1 = 1$, то случайная величина δ_n^2 генерируется с вероятностью $P(\delta_n^2 = 1 / \delta_n^1 = 1) = \frac{\rho}{p_1} + p_2$. Если $\delta_n^1 = 0$, то случайная величина δ_n^2 генерируется с вероятностью $P(\delta_n^2 = 1 / \delta_n^1 = 0) = p_2 - \frac{\rho}{1 - p_1}$.

Пример 2. Пусть $\rho = 0,1, v_0 = 0,05, S_0 = 5, T = 1, k = 0,25, \theta = 0,25, \rho = 0,5, N = 20, M = 1000$. В табл. 2 приведены значения цены европейского опциона с платежным обязательством $f(Y_T) = \max(S_0 \exp(Y_T) - K, 0)$, рассчитанные с помощью решения краевой задачи (12), а также с использованием метода Монте-Карло для случая аппроксимации нормальными и бинарными случайными величинами (формулы (13) и (14) соответственно).

3. Две модели с неопределенной волатильностью

В этой части мы рассмотрим следующую модель изменения цены рискового актива:

$$S_t = S_0 \exp(Y_t), dY_t = \left(r - \frac{\sigma_t^2}{2}\right) dt + \sigma_t dW_t. \tag{15}$$

Неопределенная волатильность удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\underline{\sigma}_t \leq \sigma_t \leq \bar{\sigma}_t. \tag{16}$$

В неравенствах (16) функции $\underline{\sigma}_t$ и $\bar{\sigma}_t$ являются детерминированными функциями. Пусть множество $\Delta_{t_1}^{t_2} = \{\sigma_t : \underline{\sigma}_t \leq \sigma_t \leq \bar{\sigma}_t, t \in [t_1, t_2]\}$. Чтобы оценить верхнюю и нижнюю цены, нам необходимо решить следующие задачи стохастического оптимального

управления:

$$\sup_{\sigma \in \Delta_0^T} E_\sigma f(Y_T), \inf_{\sigma \in \Delta_0^T} E_\sigma f(Y_T). \quad (17)$$

Введем функции $\bar{v}(t, y) = \exp(-r(T-t)) \sup_{\sigma \in \Delta_t^T} E(f(Y_T) / Y_t = y)$, $\underline{v}(t, y) = \exp(-r(T-t)) \inf_{\sigma \in \Delta_t^T} E(f(Y_T) / Y_t = y)$, тогда верхняя цена $\bar{V} = \bar{v}(0, 0)$ и нижняя цена $\underline{V} = \underline{v}(0, 0)$. Уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана для функций $\bar{v}(t, y)$ и $\underline{v}(t, y)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{v}'_t + r\bar{v}'_y + \sup_{\underline{\sigma}_t \leq \sigma \leq \bar{\sigma}_t} \frac{\sigma^2}{2} (\bar{v}''_{yy} - \bar{v}'_y) &= r\bar{v}, \\ \underline{v}'_t + r\underline{v}'_y + \inf_{\underline{\sigma}_t \leq \sigma \leq \bar{\sigma}_t} \frac{\sigma^2}{2} (\underline{v}''_{yy} - \underline{v}'_y) &= r\underline{v} \end{aligned} \quad (18)$$

с краевыми условиями $\bar{v}(T, y) = \underline{v}(T, y) = f(y)$. Эти уравнения эквивалентны следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \bar{v}'_t + (r - A_t)\bar{v}'_y + A_t\bar{v}''_{yy} + B_t|\bar{v}''_{yy} - \bar{v}'_y| &= r\bar{v}, \\ \underline{v}'_t + (r - A_t)\underline{v}'_y + A_t\underline{v}''_{yy} - B_t|\underline{v}''_{yy} - \underline{v}'_y| &= r\underline{v}, \\ A_t = \frac{\bar{\sigma}_t^2 + \underline{\sigma}_t^2}{4}, B_t = \frac{\bar{\sigma}_t^2 - \underline{\sigma}_t^2}{4}. \end{aligned} \quad (19)$$

Уравнения (19) являются уравнениями G-теплопроводности с нелинейными операторами:

$$\begin{aligned} G_1(t, v'_y, v''_{yy}) &= A_t(v''_{yy} - v'_y) + B_t|v''_{yy} - v'_y|, \\ G_2(t, v'_y, v''_{yy}) &= A_t(v''_{yy} - v'_y) - B_t|v''_{yy} - v'_y|. \end{aligned}$$

Если функция $f(y)$ непрерывна и ограничена, A_t и B_t являются непрерывными функциями на интервале $[0, T]$, то уравнения (19) имеют единственные вязкостные решения [5]. Верификация Перрона вязкостных решений (19) как решений задач стохастического оптимального управления (17) является стандартной [17]. В финансовой литературе уравнения (19) известны как уравнения Баренблота [11], когда A_t и B_t являются константами.

В первой модели $d\sigma_t = \eta\sigma_t dt$, то есть $\sigma_t = \sigma_0 \exp(\eta t)$, неопределенный параметр $\eta \in [\underline{\eta}, \bar{\eta}]$, σ_0 – начальное условие. Тогда $A_t = \frac{\sigma_0^2 (\exp(2\bar{\eta}t) + \exp(2\underline{\eta}t))}{4}$, $B_t = \frac{\sigma_0^2 (\exp(2\bar{\eta}t) - \exp(2\underline{\eta}t))}{4}$. В симметричном случае $\eta \in [-\alpha, \alpha]$, тогда уравнения (19) имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{v}'_t + \left(r - \frac{\sigma_0^2}{2} \cosh(2\alpha t) \right) \bar{v}'_y + \frac{\sigma_0^2}{2} \cosh(2\alpha t) \bar{v}''_{yy} + \frac{\sigma_0^2}{2} \sinh(2\alpha t) |\bar{v}''_{yy} - \bar{v}'_y| &= r\bar{v}, \\ \underline{v}'_t + \left(r - \frac{\sigma_0^2}{2} \cosh(2\alpha t) \right) \underline{v}'_y + \frac{\sigma_0^2}{2} \cosh(2\alpha t) \underline{v}''_{yy} - \frac{\sigma_0^2}{2} \sinh(2\alpha t) |\underline{v}''_{yy} - \underline{v}'_y| &= r\underline{v}. \end{aligned} \quad (20)$$

Итак, для первой модели верхняя цена $\bar{V} = \bar{v}(0, 0)$ и нижняя цена $\underline{V} = \underline{v}(0, 0)$.

Во второй модели $d\sigma_t = \eta_t \sigma_t dt$, то есть $\sigma_t = \sigma_0 \exp\left(\int_0^t \eta_s ds\right)$, неопределенный параметр $\eta_t \in [\underline{\eta}_t, \bar{\eta}_t]$, σ_0 – начальное условие. Уравнения (19) имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{v}'_t + r\bar{v}'_y + \frac{x^2}{2}(\bar{v}''_{yy} - \bar{v}'_y) + A_t x \bar{v}'_x + B_t x |\bar{v}'_x| &= r\bar{v}, \\ \underline{v}'_t + r\underline{v}'_y + \frac{x^2}{2}(\underline{v}''_{yy} - \underline{v}'_y) + A_t x \underline{v}'_x - B_t x |\underline{v}'_x| &= r\underline{v}, \\ A_t &= \frac{\bar{\eta}_t + \underline{\eta}_t}{2}, B_t = \frac{\bar{\eta}_t - \underline{\eta}_t}{2} \end{aligned} \quad (21)$$

с краевыми условиями $\bar{v}(T, y, x) = \underline{v}(T, y, x) = f(y)$. Уравнения (21) являются двумерными уравнениями G-теплопроводности с

$$\begin{aligned} G_1(x, t, v'_y, v'_x, v''_{yy}) &= rv'_y + \frac{x^2}{2}(v''_{yy} - v'_y) + A_t xv'_x + B_t x |v'_x|, \\ G_2(x, t, v'_y, v'_x, v''_{yy}) &= rv'_y + \frac{x^2}{2}(v''_{yy} - v'_y) + A_t xv'_x - B_t x |v'_x|. \end{aligned}$$

В симметричном случае, когда $\eta_t \in [-\alpha_t, \alpha_t]$, уравнения (21) имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{v}'_t + r\bar{v}'_y + \frac{x^2}{2}(\bar{v}''_{yy} - \bar{v}'_y) + \alpha_t x |\bar{v}'_x| &= r\bar{v}, \\ \underline{v}'_t + r\underline{v}'_y + \frac{x^2}{2}(\underline{v}''_{yy} - \underline{v}'_y) - \alpha_t x |\underline{v}'_x| &= r\underline{v}. \end{aligned} \quad (22)$$

4. Аппроксимация моделей с неопределенной волатильностью при помощи дерева

Произведем разбиение интервала $[0, T]$ на N частей с шагом $h = \frac{T}{N}$. Рассмотрим последовательность $\delta: \delta_n \in \{-1, 1\}$, $p_n = P(\delta_n = 1) = \frac{1}{2} + \frac{\left(r - \frac{\sigma_{n-1}^2}{2}\right)\sqrt{h}}{2\sigma_{n-1}}$ фильтрацию $F_n = \sigma(\delta_1, \dots, \delta_n)$ и последовательность $\Delta \bar{Y}_n = \sigma_{n-1} \delta_n \sqrt{h}$, $\bar{Y}_0 = 0, n = 1, \dots, N$. Последовательность $\Delta \sigma_n = \sigma_{n-1} \eta_n h, \underline{\eta}_n \leq \eta_n \leq \bar{\eta}_n$. Рассмотрим следующие (стандартные) задачи стохастического оптимального управления в дискретном времени:

$$\sup_{\eta_1, \dots, \eta_{N-1}} Ef(\bar{Y}_N), \quad \inf_{\eta_1, \dots, \eta_{N-1}} Ef(\bar{Y}_N). \quad (23)$$

Введем функции: $\bar{v}^N(n, y, x) = \frac{1}{(1 + rh)^{N-n}} \sup_{\eta_n, \dots, \eta_{N-1}} E(f(\bar{Y}_N) / \bar{Y}_n = y, \sigma_{n-1} = x)$,

$$\underline{v}^N(n, y, x) = \frac{1}{(1 + rh)^{N-n}} \inf_{\eta_n, \dots, \eta_{N-1}} E(f(\bar{Y}_N) / \bar{Y}_n = y, \sigma_{n-1} = x).$$

Интервал справедливых цен в первой модели стохастической волатильности

| Метод | Нижняя цена | Справедливая цена | Верхняя цена |
|------------------------|-------------|-------------------|--------------|
| Решение краевой задачи | 0,4593 | 0,4755 | 0,5016 |
| Рекуррентные формулы | 0,4523 | 0,4767 | 0,5030 |

Справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned}
 & \bar{v}^N(N, \bar{Y}_N, \sigma_{N-1}) = \underline{v}^N(N, \bar{Y}_N, \sigma_{N-1}) = f(\bar{Y}_N), \\
 & \bar{v}^N(n-1, y, x) = \\
 & = \frac{1}{1+rh} \sup_{\eta_{n-1}} E(\bar{v}^N(n, y + \Delta \bar{Y}_n, x + \Delta \sigma_{n-1}) / \bar{Y}_{n-1} = y, \sigma_{n-2} = x) = \\
 & = \frac{1}{1+rh} \sup_{\eta_{n-1}} (p\bar{v}^N(n, y + x(1 + \eta_{n-1}h)\sqrt{h}, x(1 + \eta_{n-1}h)) + \\
 & \quad + (1-p)\bar{v}^N(n, y - x(1 + \eta_{n-1}h)\sqrt{h}, x(1 + \eta_{n-1}h))), \\
 & \underline{v}^N(n-1, y, x) = \\
 & = \frac{1}{1+rh} \inf_{\eta_{n-1}} E(\underline{v}^N(n, y + \Delta \bar{Y}_n, x + \Delta \sigma_{n-1}) / \bar{Y}_{n-1} = y, \sigma_{n-2} = x) = \\
 & = \frac{1}{1+rh} \inf_{\eta_{n-1}} (p\underline{v}^N(n, y + x(1 + \eta_{n-1}h)\sqrt{h}, x(1 + \eta_{n-1}h)) + \\
 & \quad + (1-p)\underline{v}^N(n, y - x(1 + \eta_{n-1}h)\sqrt{h}, x(1 + \eta_{n-1}h))).
 \end{aligned} \tag{24}$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Если функция $f(y)$ непрерывна и ограничена, то

$$\bar{v}(0, 0, \sigma_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{v}^N(0, 0, \sigma_0),$$

$$\underline{v}(0, 0, \sigma_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \underline{v}^N(0, 0, \sigma_0).$$

Отметим, что $\eta_i \in [\underline{\eta}_i, \bar{\eta}_i], i = 1, \dots, N; \bar{v}(t, y, x), \underline{v}(t, y, x)$ – вязкостные решения уравнений (21) с краевыми условиями: $\bar{v}(T, y, x) = \underline{v}(T, y, x) = f(y)$.

Доказательство утверждения является стандартным, см., например, [18, 19].

Пример 3. Пусть $r = 0,1, \sigma = 0,05, S_0 = 5, K = 5, T = 1, N = 20$. В табл. 3 приведены значения верхней и нижней цены европейского опциона с платежным обязательством $f(Y_T) = \max(S_0 \exp(Y_T) - K, 0)$, рассчитанные с помощью формул (20) и (24) в случае $\eta \in [-1, 1]$. Случай $\eta = 0$ ($\sigma_t = \sigma_0$) соответствует ситуации, когда рынок полный, и справедливая цена вычисляется с помощью решения краевой задачи (3) (либо с помощью рекуррентных формул (6)), когда $\sigma = \sigma_0$.

На рис. 3 приведены графики зависимости значений $U(0, y), \underline{v}(0, y), \bar{v}(0, y)$ от y при $K = 5$. Сплошной линией нарисован график зависимости значений $\bar{v}(0, y)$ от y . Пунктирной линией нарисован график зависимости значений $U(0, y)$ от y . Точечной линией нарисован график зависимости значений $\underline{v}(0, y)$ от y .

Пример 4. Пусть $r = 0,1, \sigma_0 = 0,1, S_0 = 5, K = 5, T = 1, \alpha_t = t$. В табл. 4 приведены значения верхней и нижней цены европейского опциона с платежным обязательством $f(Y_T) = \max(S_0 \exp(Y_T) - K, 0)$, рассчитанные с помощью формул (22) и (24) в случае $\eta_t \in [-\alpha_t, \alpha_t]$. Случай $\eta_t = 0$ ($\sigma_t = \sigma_0$) соответствует ситуации, когда рынок

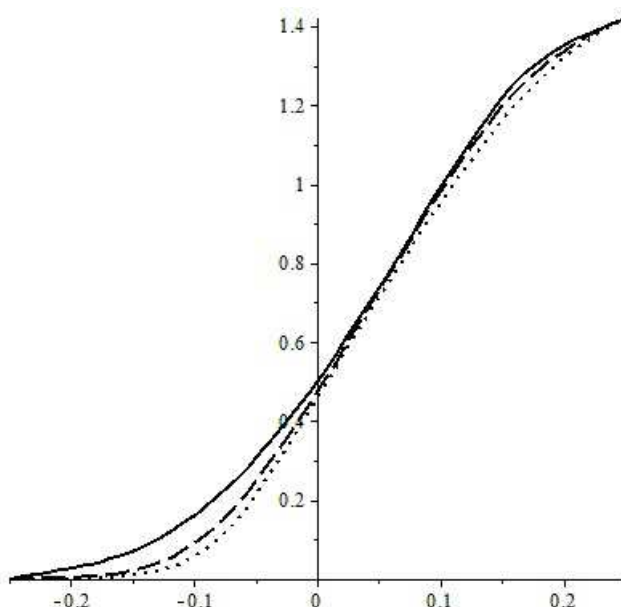


Рис. 3. Графики зависимости значений $U(0, y), v(0, y), \bar{v}(0, y)$ от y в первой модели неопределенной волатильности

Таблица 4

Интервал справедливых цен во второй модели стохастической волатильности

| Метод | Нижняя цена | Справедливая цена | Верхняя цена |
|------------------------|-------------|-------------------|--------------|
| Решение краевой задачи | 0,4312 | 0,5086 | 0,5403 |
| Рекуррентные формулы | 0,4360 | 0,5005 | 0,5405 |

полный, и справедливая цена вычисляется с помощью решения краевой задачи (3) с (либо с помощью рекуррентных формул (6)), когда $\sigma = \sigma_0$.

На рис. 4 приведены графики зависимости значений $U(0, y), v(0, y, \sigma_0), \bar{v}(0, y, \sigma_0)$ от y при $K = 5$. Сплошной линией нарисован график зависимости значений $\bar{v}(0, y, \sigma_0)$ от y . Пунктирной линией нарисован график зависимости значений $U(0, y)$ от y . Точечной линией нарисован график зависимости значений $v(0, y, \sigma_0)$ от y .

Заключение

В статье продемонстрированы вычислительные методы, использующие разные техники, в моделях, в которых волатильность является одной из возможных траекторий, а именно, в модели Хестона со случайными траекториями, и в модели с неопределенной волатильностью, с детерминированными траекториями из доверительного множества возможных траекторий. Причем основное внимание уделено расчетам интервалов справедливых цен для второй модели. Первый метод основан на решении вязкостных уравнений с использованием разностных схем. Вторым является метод Монте-Карло, который основан на моделировании исходного процесса стоимости акции. Третьим является метод деревьев, который основан на аппроксимации исходной непрерывной модели дискретной моделью и получением рекуррентных формул на бинарном дереве для расчета верхней и нижней цен. Показано, что интервалы справедливых цен, полученные с использованием трех численных методов, практически

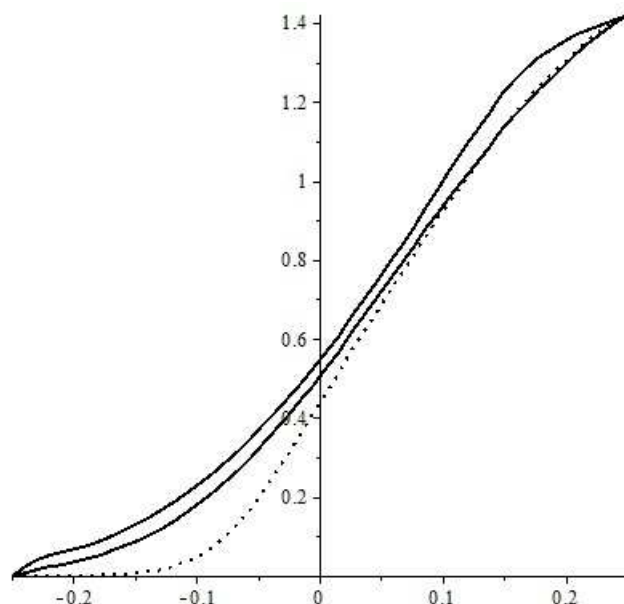


Рис. 4. Графики зависимости значений $U(0, y)$, $\underline{v}(0, y, \sigma_0)$, $\bar{v}(0, y, \sigma_0)$ от y во второй модели неопределенной волатильности

совпадают. Основной же вывод заключается в том, что модель с неопределенной волатильностью является адекватной заменой модели Хестона в случаях, когда необходимо вычислить интервал справедливых цен.

Литература

1. Samuelson, P. Rational Theory of Warrant Pricing / P. Samuelson // *Industrial Management Review*. – 1965. – V. 6, № 2. – P. 13–31.
2. Black, F. The Pricing of Options and Corporate Liabilities / F. Black, M. Scholes // *Journal of Political Economy*. – 1973 – V. 81, № 3. – P. 637–659.
3. Merton, R. Theory of Rational Option Pricing / R. Merton // *Bell Journal of Economics and Management Science*. – 1973. – № 4. – P. 141–183.
4. Ширяев, А.Н. Основы стохастической финансовой математики / А.Н. Ширяев. – М.: МЦНМО, 2016.
5. Heston, S. A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options / S. Heston // *Review of Financial Studies*. – 1993. – № 6. – P. 327–343.
6. Rouah, F. The Heston Model and Its Extensions in Matlab and C / F. Rouah, L. Steven. – Hoboken; New Jersey: John Wiley and Sons, 2013.
7. Beliaevsky, G. The Uncertainty Volatility Models and Tree Approximation / G. Beliaevsky, N. Danilova, T. Grober // *Applied Mathematical Sciences*. – 2016. – V. 10, № 19. – P. 921–930.
8. Avellaneda, M. Pricing and Hedging Derivative Securities in Markets with Uncertain Volatilities / M. Avellaneda, A. Levy, A. Paras // *Applied Mathematical Finance*. – 1995. – № 2. – P. 73–88.
9. Hull, J. The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities / J. Hull, A. White // *Journal of Finance*. – 1997. – V. 42, № 2. – P. 281–300.
10. Johnson, H. Option Pricing when the Variance is Changing / H. Johnson, D. Shanno // *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. – 1987. – V. 22, № 2. – P. 143–151.

11. Meyer, G. The Black–Scholes Barenblatt Equation for Options with Uncertain Volatility and Its Application to Static Hedging / G. Meyer // International Journal of Theoretical and Applied Finance. – 2006. – № 9. – P. 673–703.
12. Shige Peng. G-Brownian Motion and Dynamic Risk Measure under Volatility Uncertainty / Shige Peng // arXiv: Probability. – 2007. – 114 p. – URL: <https://arxiv.org/abs/0711.2834>
13. Stein, E. Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: an Analytic Approach / E. Stein, J. Stein // Reviews of Financial Studies. – 1991. – V. 4, № 4. – P. 727–752.
14. ТυχонOFF, А. Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur / А. ТυχонOFF // Математический сборник. – 1935. – Т. 42, № 2. – С. 199–216.
15. Scott L. Option Pricing when the Variance Changes Randomly. Theory, Estimation and an Application / L. Scott // Journal of Financial and Quantitative Analysis. – 1987. – V. 22, № 4. – P. 419–438.
16. Белявский, Г.И. Управление в бинарных моделях с разладкой / Г.И. Белявский, Н.В. Данилова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2022. – Т. 15, № 3. – С. 67–82.
17. Rokhlin, D. The Central Limit Theorem under Uncertain Linear Transforms / D. Rokhlin // Statistics and Probability Letters. – 2015. – V. 107. – P. 191–198.
18. Bayraktar, E. Stochastic Perrons Method for Hamilton–Jacobi–Bellman Equations / E. Bayraktar, M. Sirbu // SIAM Journal on Control and Optimization. – 2013. – V. 51, № 6. – P. 4274–4294.
19. Данилова, Н.В. Параллельный алгоритм расчета справедливой цены европейского опциона / Н.В. Данилова, Б.Я. Штейнберг, Л.Н. Фоменко // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Информатика. Телекоммуникации. Управление. – 2011. – № 3 (126). – С. 115–119.

Григорий Исаакович Белявский, доктор технических наук, профессор, кафедра «Высшая математика и исследование операций», Южный федеральный университет (г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация), gbelyavski@sfedu.ru.

Наталья Викторовна Данилова, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Высшая математика и исследование операций», Южный федеральный университет (г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация), nvdanilova@sfedu.ru.

Поступила в редакцию 11 января 2023 г.

MSC 65N50, 65C05

DOI: 10.14529/mmp230301

MODELS WITH UNCERTAIN VOLATILITY

G.I. Beliavsky¹, N.V. Danilova¹

¹South Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation

E-mail: gbelyavski@sfedu.ru, nvdanilova@sfedu.ru

Models in which volatility is one of the possible trajectories are considered in the paper. As an example of a model with a certain volatility, the Black–Scholes model is considered. As an example of models with uncertain volatility three models are considered: the Heston model with random trajectories and two models with deterministic trajectories from a confidence set of possible trajectories. Three computational methods are proposed for finding the range of fair prices for a European option. The first method is based on

solving viscosity equations using difference schemes. The second is the Monte–Carlo method, which is based on the simulation of the initial stock price process. The third is the tree method, which is based on approximating the original continuous model with a discrete model and obtaining recurrent formulas on a binary tree to calculate the upper and lower prices. The results of calculations using the listed methods are presented. It is shown that the ranges of fair prices obtained using the three numerical methods practically coincide.

Keywords: Black–Scholes model; Heston model; uncertain volatility; viscosity equation; option; fair price.

References

1. Samuelson P. Rational Theory of Warrant Pricing. *Industrial Management Review*, 1965, vol. 6, no. 2, pp.13–31. DOI: 10.1007/978-3-319-22237-0-11
2. Black F., Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 1973, vol. 81, no. 3, pp. 637–659. DOI: 10.1142/9789814759588-0001
3. Merton R. Theory of Rational Option Pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 1973, no. 4, pp. 141–183. DOI: 10.2307/3003143
4. Shryaev A. *Osnovy stohasticheskikh matematicheskikh finansov* [Basis of Stochastic Mathematical Finance]. Moscow, MCNMO, 2016. (in Russian)
5. Heston S. A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *Review of Financial Studies*, 1993, no. 6, pp. 327–343. DOI: 10.1093/rfs/6.2.327
6. Rouah F., Steven L. *The Heston Model and Its Extensions in Matlab and C*. Hoboken, New Jersey, John Wiley and Sons, 2013.
7. Beliaevsky G., Danilova N., Grober T. The Uncertainty Volatility Models and Tree Approximation. *Applied Mathematical Sciences*, 2016, vol. 10, no. 19, pp. 921–930. DOI: 10.12988/ams.2016.6114
8. Avellaneda M., Levy A., Paras A. Pricing and Hedging Derivative Securities in Markets with Uncertain Volatilities. *Applied Mathematical Finance*, 1995, no. 2, pp. 73–88. DOI: 10.1080/13504869500000005
9. Hull J., White A. The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities. *Journal of Finance*, 1997, vol. 42, no. 2, pp. 281–300. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1987.tb02568.x
10. Johnson H., Shanno D. Option Pricing when the Variance is Changing. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1987, vol. 22, no. 2, pp. 143–151. DOI: 10.2307/2330709
11. Meyer G. The Black-Scholes Barenblatt Equation for Options with Uncertain Volatility and its Application to Static Hedging. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 2006, no. 9, pp. 673–703. DOI: 10.1142/S0219024906003755
12. Peng Shige. G-Brownian Motion and Dynamic Risk Measure under Volatility Uncertainty. *arXiv: Probability*, 2007, 114 p. Available at: <https://arxiv.org/abs/0711.2834>. DOI: 10.48550/arXiv.0711.2834
13. Stein E., Stein J. Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: an Analytic Approach. *Reviews of Financial Studies*, 1991, vol. 4, no. 4, pp. 727–752.
14. Tychonoff A. Théorèmes d’unicité pour l’équation de la chaleur. *Mathematics Sbornik*, 1935, vol. 42, no. 2, pp. 199–216. (in French)
15. Scott L. Option Pricing when the Variance Changes Randomly. Theory, Estimation and an Application. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1987, vol. 22, no. 4, pp. 419–438. DOI: 10.2307/2330793
16. Beliaevsky G., Danilova N. Control in Binary Models with Disorder. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2022, vol. 15, no. 3, pp. 67–82. (in Russian) DOI: 10.14529/mmp220305

17. Rokhlin D. The Central Limit Theorem under Uncertain Linear Transforms. *Statistics and Probability Letters*, 2015, vol. 107, pp. 191–198. DOI: 10.48550/arXiv.1505.01084
18. Bayraktar E., Sirbu M. Stochastic Perrons Method for Hamilton–Jacobi–Bellman Equations. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2013, vol. 51, no. 6, pp. 4274–4294. DOI: 10.48550/arXiv.1212.2170
19. Danilova N., Steinberg B., Fomenko L. The Parallel Algorithm of the Fair Price Calculation of European Option. *St. Petersburg Polytechnical University Journal. Computer Science. Telecommunication and Control Systems*, 2011, vol. 3, no. 126, pp. 115–119. (in Russian)

Received January 11, 2023