КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.9 **DOI: 10.14529/mmp230406**

АНАЛИЗ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВЕНТЦЕЛЯ, СОСТАВЛЕННОЙ ИЗ УРАВНЕНИЙ ФИЛЬТРАЦИИ ВЛАГИ В ШАРЕ И НА ЕГО ГРАНИЦЕ

***Н.С. Гончаров*[1], *Г.А. Свиридюк*[1]**
[1]Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

Впервые изучены детерминированная и стохастическая системы Вентцеля уравнений Баренблатта – Желтова – Кочиной, описывающих процесс фильтрации влаги в трехмерном шаре и на его границе. В детерминированном случае установлена однозначная разрешимость начальной задачи для системы Вентцеля в специфическом построенном гильбертовом пространстве. В случае стохастической системы используется теория производной Нельсона – Гликлиха и строится стохастическое решение, которое позволяет определять прогнозы количественного изменения геохимического режима грунтовых вод при безнапорной фильтрации. Отметим, что для изучаемой системы фильтрации рассматривалось неклассическое условие Вентцеля, поскольку оно представлено уравнением с оператором Лапласа – Бельтрами, заданным на границе области, понимаемой как гладкое компактное риманово многообразие без края, причем внешнее воздействие представлено нормальной производной функции, заданной в области.

Ключевые слова: система Вентцеля; уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной; производная Нельсона – Гликлиха.

Введение

Фильтрация влаги как и ее течение, испарение, падение и т.д. является одним из процессов влагопереноса. Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, – область с границей Γ класса C^∞. На компакте $\Omega \cup \Gamma$ задана система из двух уравнений Баренблатта – Желтова – Кочиной [1], описывающая процесс фильтрации влаги

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u + \beta u,\ u = u(t,x),\ (t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega, \tag{1}$$

$$(\lambda - \Delta)v_t = \gamma\Delta v + \frac{\partial u}{\partial \nu} + \delta v,\ v = v(t,x),\ (t,x) \in \mathbb{R} \times \Gamma, \tag{2}$$

$$\mathrm{tr}\ u = v,\ \text{на } \mathbb{R} \times \Gamma. \tag{3}$$

Здесь символом Δ в (1) обозначен оператор Лапласа в области Ω, а в (2) тем же символом обозначен оператор Лапласа – Бельтрами на гладком римановом многообразии Γ . Символом $\nu = \nu(t,x)$, $(t,x) \in \mathbb{R} \times \Gamma$, обозначена внешняя по отношению к $\mathbb{R} \times \Gamma$ нормаль к $\mathbb{R} \times \Omega$. Параметры $\alpha, \lambda, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ характеризуют среду.

Ранее в [2] мы, следуя традиции [5–7], условие вида (2), в котором порядок производных по пространственным переменным не ниже порядка по тем же в (1), называли краевым условием Вентцеля. Однако намереваясь в будущем рассматривать различные случаи области Ω и границы Γ (например, Ω – ограниченное связное риманово многообразие с краем Γ) считаем необходимым называть (1), (2) системой уравнений, пусть и заданных на множествах разной геометрической размерности. В поддержку этого подхода говорит тот факт, что уравнения (1), (2) описывают один и тот же физический процесс фильтрации влаги. Термин же «краевые условия» следует оставить за уравнениями, заданными на границе (краю) области (многообразия) и имеющих меньший порядок производных по пространственным переменным (см. классический трактат [3], а также [8]). Название «система уравнений Вентцеля» подчеркивает заслуги первооткрывателя [9] нового раздела математической физики.

Разрешимость системы (1), (2) будем изучать в самом простом случае: $\Omega = \{(r,\theta,\varphi) : r \in [0,R), \theta \in [0,\pi], \varphi \in [0,2\pi]\}$ – шар в $\mathbb{R}^3$, а $\Gamma = \{(\theta,\varphi) : \theta \in [0,\pi), \varphi \in [0,2\pi)\}$ – ограниченный шар. В этом случае (1), (2) преобразуется к виду

$$(\lambda - \Delta_{r,\theta,\varphi})u_t = \alpha\Delta_{r,\theta,\varphi}u + \beta u,\ u = u(t,r,\theta,\varphi),\ (t,r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}\times\Omega, \tag{4}$$

$$(\lambda - \Delta_{\theta,\varphi})v_t = \gamma\Delta_{\theta,\varphi}v + \partial_R u + \delta v,\ v = v(t,\theta,\varphi),\ (t,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}\times\Gamma, \tag{5}$$

где

$$\begin{gathered} \Delta_{r,\theta,\varphi} = (r-R)\tfrac{\partial}{\partial r}\left((R-r)\tfrac{\partial}{\partial r}\right) + \tfrac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \tfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}, \\ \Delta_{\theta,\varphi} = \tfrac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \tfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}, \quad \partial_R = \tfrac{\partial}{\partial r}\Big|_{r=R}. \end{gathered} \tag{6}$$

К данной системе присовокупим условие согласования (3) и снабдим ее начальными условиями

$$u(0,r,\theta,\varphi) = u_0(r,\theta,\varphi), \quad v(0,\theta,\varphi) = v_0(\theta,\varphi). \tag{7}$$

Решение задачи (3) – (7) назовем детерминированным решением системы Вентцеля. Заметим, что преобразовав оператор (6) к декартовым координатам мы получим

$$\begin{gathered} \Delta_{x,y} = x\tfrac{\partial}{\partial x} + y\tfrac{\partial}{\partial y} + z\tfrac{\partial}{\partial z} + \left(z^2 + y^2\right)\tfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \\ \left(\tfrac{xy(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2} - 2xy\right)\tfrac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \left(x^2 + y^2\tfrac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2}\right)\tfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(x^2+y^2+z^2\right)\tfrac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{gathered}$$

Рассмотрение оператора Лапласа в стандартных сферических координатах мы переносим на наши будущие исследования. Прибегая к стохастической интерпретации уравнений в частных производных, в этой работе затронем исследования недетерминированных задач в необходимой для нас интерпретации, отличительной особенностью которой является иное понятие «белого шума» в смысле производной Нельсона – Гликлиха от винеровского процесса. Термин производной Нельсона – Гликлиха изначально был введен в монографии [11], там же была найдена первая производная случайного процесса. Данная парадигма не только обосновала согласованность с теорией Энштейна – Смолуховского, позволяющего понимать под броуновским движением искомый стохастический процесс, а под производной от этого процесса – «белый шум», но и сподвигла к появлению нового направления изучения стохастических уравнений соболевского типа. Это отражено в исследованиях: дихотомий стохастического уравнения, заданного на многообразии в [12]; применения метода фазового пространства в случае (L,p)-ограниченного оператора M в [13].

Статья, кроме введения и списка литературы, содержит две части. В первой части рассматривается существование и единственность детерминированной системы Вентцеля уравнений в шаре и на его границе. Во второй части проводятся абстрактные рассуждения, заключающиеся в построении пространства ($\mathfrak{H}$-*значных*) $\mathbf{K}$-«*шумов*» и доказательства существования и единственности стохастической системы Вентцеля уравнений в шаре и на его границе.

1. Детерминированная система Вентцеля

Рассмотрим следующий ряд

$$u = \sum_{k=2}^{\infty} exp\left(t\frac{\beta-\alpha k^2}{\lambda+k^2}\right)\frac{(R-r)^k}{R^k}\left(a_k \sin k\theta(\sin k\varphi + \cos k\varphi)+\right.$$
$$\left.+b_k \cos k\theta(\sin k\varphi + \cos k\varphi)\right) + \sum_{k=1}^{\infty} exp\left(t\frac{\beta-\alpha k^2}{\lambda+k^2}\right)\left(c_k \sin k\theta(\sin k\varphi + \cos k\varphi)+\right. \tag{8}$$
$$\left.+d_k \cos k\theta(\sin k\varphi + \cos k\varphi)\right),$$

где

$$a_k = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} u_0(r,\theta,\varphi)\frac{(R-r)^k}{R^k}\sin k\theta(\sin k\varphi + \cos k\varphi) r dr d\varphi,$$
$$b_k = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} u_0(r,\theta,\varphi)\frac{(R-r)^k}{R^k}\cos k\theta(\sin k\varphi + \cos k\varphi) r dr d\varphi,$$
$$c_k = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} v_0(\theta,\varphi)\sin k\theta(\sin k\varphi + \cos k\varphi) d\theta d\varphi,$$
$$d_k = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} v_0(\theta,\varphi)\cos k\theta(\sin k\varphi + \cos k\varphi) d\theta d\varphi.$$

Нетрудно заметить, что построенный ряд выше является формальным решением уравнения (4). Причем, если ряды в (8) равномерно сходятся, то перед нами решение задачи (4), (7), где $\partial_R u = 0$. Учитывая это, можно построить решение задачи (5), (7)

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} exp\left(t\frac{\delta-\gamma k^2}{\lambda+k^2}\right)\left(c_{k,n}\cos k\varphi + d_{k,n}\sin k\varphi\right), \tag{9}$$

где в случае $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$ решения задачи (5) – (7) будут удовлетворять условию согласования (3).

Замыкание линеала $\operatorname{span}\{(R^k)^{-1}(R-r)^k \sin k\theta(\sin k\varphi+\cos k\varphi), (R^k)^{-1}(R-r)^k \cos k\theta\cdot$ $\cdot(\sin k\varphi + \cos k\varphi)\colon k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}, r \in (0,R), \theta \in [0,\pi], \varphi \in [0,2\pi)\}$ порожденное скалярным произведением

$$(\varphi,\psi) = \int_0^{R}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varphi(r,\theta,\varphi)\psi(r,\theta,\varphi) r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr,$$

обозначим символом $A(\Omega)$. Далее, замыкание линеала $\operatorname{span}\{\sin k\theta(\sin k\varphi + \cos k\varphi)$, $\cos k\theta(\sin k\varphi+\cos k\varphi)\colon k \in \mathbb{N}, \theta \in [0,\pi], \varphi \in [0,2\pi)\}$ по норме, порожденной скалярным произведением

$$(\varphi,\psi) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varphi(r,\theta,\varphi)\psi(r,\theta,\varphi) d\theta d\varphi,$$

обозначим символом $A(\Gamma)$.

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Для любых* $u_0 \in A(\Omega)$ *и* $v_0 \in A(\Gamma)$ *таких, что выполнено* (3), *и для коэффициентов* $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda \in \mathbb{R}$, *таких, что выполнено следующее условие* $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$, *а* $\lambda \neq k^2$, *где* $k \in \mathbb{N}$, *существует единственное решение* $(u,v) \in C^\infty(\mathbb{R}; A(\Omega)\oplus A(\Gamma))$ *задачи* (3) – (5).

2. Стохастическая система Вентцеля

Пусть $\Omega \equiv (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – полное вероятностное пространство с вероятностной мерой $\mathbf{P}$, ассоциированное с σ-алгеброй $\mathcal{A}$ подмножеств множества Ω, а $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, наделенное борелевой σ-алгеброй. Измеримое отображение $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *случайной величиной*. Множество случайных величин с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией образуют гильбертово пространство $\mathbf{L}_2$ со скалярным произведением $(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{E}\xi_1\xi_2$.

Пусть $\mathfrak{I} \subset \mathbb{R}$ – интервал. Измеримое отображение $\eta : \mathfrak{I} \times \Omega \to \mathbb{R}$, назовем *стохастическим процессом*, для каждого фиксированного $\omega \in \Omega$ функцию $\eta(\cdot, \omega) : \mathfrak{I} \to \mathbb{R}$ – его *траекторией*, а для каждого фиксированного $t \in \mathfrak{I}$ случайную величину $\eta(t, \cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$ – его *сечением*. Стохастический процесс $\eta = \eta(t)$, $t \in \mathfrak{I}$, назовем *непрерывным*, если п.н. (почти наверное) все его траектории непрерывны (т.е. при п.в. (почти всех) $\omega \in \mathcal{A}$ траектории $\eta(\cdot, \omega)$ являются непрерывными функциями). Множество непрерывных стохастических процессов образует банахово пространство, которое мы обозначим символом $\mathbf{C}(\mathfrak{I}; \mathbf{L}_2)$ с нормой

$$\|\eta\|_{\mathbf{C}L_2} = \sup_{t \in \mathfrak{I}} (\mathbf{D}\eta(t, \omega))^{1/2}.$$

Пусть $\mathcal{A}_0$ — σ-подалгебра σ-алгебры $\mathcal{A}$. Построим подпространство $\mathbf{L}_2^0 \subset \mathbf{L}_2$ случайных величин, измеримых относительно $\mathcal{A}_0$. Обозначим через $\Pi : \mathbf{L}_2 \to \mathbf{L}_2^0$ – ортопроектор. Пусть $\xi \in \mathbf{L}_2$, тогда $\Pi\xi$ называется *условным математическим ожиданием* случайной величины ξ и обозначается символом $\mathbf{E}(\xi|\mathcal{A}_0)$. Зафиксируем $\eta \in \mathbf{C}(\mathfrak{I}; \mathbf{L}_2)$ и $t \in \mathfrak{I}$, через $\mathcal{N}_t^\eta$ обозначим *σ-алгебру, порожденную случайной величиной* $\eta(t)$, и обозначим $\mathbf{E}_t^\eta = \mathbf{E}(\cdot|\mathcal{N}_t^\eta)$.

Определение 1. *Пусть $\eta \in \mathbf{C}(\mathfrak{I}; \mathbf{L}_2)$. Производной Нельсона – Гликлиха $\overset{\circ}{\eta}$ стохастического процесса η в точке $t \in \mathfrak{I}$ называется случайная величина*

$$\overset{\circ}{\eta}(t, \cdot) = \frac{1}{2}\left(\lim_{\Delta t \to 0+} \mathbf{E}_t^\eta \left(\frac{\eta(t + \Delta t, \cdot) - \eta(t, \cdot)}{\Delta t}\right) + \right.$$
$$\left. + \lim_{\Delta t \to 0+} \mathbf{E}_t^\eta \left(\frac{\eta(t, \cdot) - \eta(t - \Delta t, \cdot)}{\Delta t}\right)\right),$$

если предел существует в смысле равномерной метрики на $\mathbb{R}$.

Если производные $\overset{\circ}{\eta}(t, \cdot)$ Нельсона – Гликлиха стохастического процесса $\eta(t, \cdot)$ существуют во всех (или п.в.) точках интервала $\mathfrak{I}$, то мы говорим о существовании производной Нельсона – Гликлиха $\overset{\circ}{\eta}(t, \cdot)$ на $\mathfrak{I}$ (п.н. на $\mathfrak{I}$). Множество непрерывных стохастических процессов, имеющих непрерывные производные Нельсона – Гликлиха $\overset{\circ}{\eta}$ образуют банахово $\mathbf{C}^1(\mathfrak{I}; \mathbf{L}_2)$ пространство с нормой

$$\|\eta\|_{\mathbf{C}^1\mathbf{L}_2} = \sup_{t \in \mathfrak{I}} \left(\mathbf{D}\eta(t, \omega) + \mathbf{D}\overset{\circ}{\eta}(t, \omega)\right)^{1/2}.$$

Определим далее по индукции банаховы пространства $\mathbf{C}^l(\mathfrak{I}; \mathbf{L}_2)$, $l \in \mathbb{N}$, стохастических процессов, чьи траектории п.н. дифференцируемы по Нельсону — Гликлиху на $\mathfrak{I}$ до порядка $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ включительно. Нормы в них задаются формулами

$$\|\eta\|_{\mathbf{C}^l\mathbf{L}_2} = \sup_{t \in \mathfrak{I}} \left(\sum_{k=0}^{l} \mathbf{D}\overset{\circ}{\eta}{}^{(k)}(t, \omega)\right)^{1/2}.$$

Здесь будем считать производную Нельсона – Гликлиха нулевого порядка исходным случайным процессом, т.е. $\overset{\circ}{\eta}{}^{(0)} \equiv \eta$. Отметим еще, что пространства $\mathbf{C}^l(\mathfrak{I}; \mathbf{L}_2)$, $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, для краткости будем называть *пространствами «шумов»*.

Перейдем к построению пространства *случайных* $\mathbf{K}$*-величин.* Возьмем $\mathfrak{H}$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{\varphi_k\}$, монотонную последовательность $\mathbf{K} = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ такую, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 < +\infty$, а также последовательность $\{\xi_k\} = \xi_k(\omega) \subset \mathbf{L}_2$ случайных величин такую, что $\|\xi_k\|_{\mathbf{L}_2} \leq C$, при некоторой константе $C \in \mathbb{R}_+$ и при всех $k \in \mathbb{N}$. Построим $\mathfrak{H}$*-значную случайную* $\mathbf{K}$*-величину*

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k(\omega) \varphi_k.$$

Пополнение линейной оболочки множества $\{\lambda_k \xi_k \varphi_k\}$ по норме

$$\|\eta\|_{\mathbf{H}_K \mathbf{L}_2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \mathbf{D} \xi_k \right)^{1/2}$$

называется *пространством* ($\mathfrak{H}$*-значных) случайных* $\mathbf{K}$*-величин* и обозначается символом $\mathbf{H}_K \mathbf{L}_2$. Как нетрудно видеть, пространство $\mathbf{H}_K \mathbf{L}_2$ — гильбертово, причем построенная выше случайная $\mathbf{K}$-величина $\xi = \xi(\omega) \in \mathbf{H}_K \mathbf{L}_2$. Аналогично, банахово пространство ($\mathfrak{H}$*-значных*) $\mathbf{K}$-*«шумов»* $\mathbf{C}^l(\mathfrak{I}; \mathbf{H}_K \mathbf{L}_2)$, $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, определим как пополнение линейной оболочки множества $\{\lambda_k \eta_k \varphi_k\}$ по норме

$$\|\eta\|_{\mathbf{C}^l \mathbf{H}_K \mathbf{L}_2} = \sup_{t \in \mathfrak{I}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \sum_{m=1}^{l} \mathbf{D} \overset{\circ}{\eta}{}_k^{(m)} \right)^{1/2},$$

где последовательность «шумов» $\{\eta_k\} \subset \mathbf{C}^l(\mathfrak{I}; \mathbf{L}_2)$, $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Как нетрудно видеть, вектор

$$\eta(t, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \eta_k(t, \omega) \varphi_k$$

лежит в пространстве $\mathbf{C}^l(\mathfrak{I}; \mathbf{H}_K \mathbf{L}_2)$, если последовательность векторов $\{\eta_k\} \subset \mathbf{C}^l(\mathfrak{I}; \mathbf{L}_2)$ и все их производные Нельсона – Гликлиха до порядка $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ включительно равномерно ограничены по норме $\| \cdot \|_{\mathbf{C}^l \mathbf{L}_2}$.

Пример. Вектор, лежащий во всех пространствах $\mathbf{C}^l(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_K \mathbf{L}_2)$, $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$,

$$W_{\mathbf{K}}(t, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \beta_k(t, \omega) \varphi_k,$$

где $\{\beta_k\} \subset \mathbf{C}^l(\mathfrak{I}; \mathbf{L}_2)$ — последовательность броуновских движений, называется *($\mathfrak{H}$-значным) винеровским* $\mathbf{K}$*-процессом.*

Пусть теперь $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{F}$) – вещественное сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{\varphi_k\}$ ($\{\psi_k\}$). Введем в рассмотрение монотонную последовательность $\mathbf{K} = \{\lambda_k\} \subset \{0\} \cup \mathbb{R}$ такую, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 < +\infty$. Символом $\mathbf{U_K L}_2$ ($\mathbf{F_K L}_2$)

обозначим гильбертово пространство, являющееся пополнением линейной оболочки *случайных* $\mathbf{K}$*-величин*

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k \varphi_k,\ \xi_k \in \mathbf{L}_2, \quad \left(\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \zeta_k \psi_k,\ \zeta_k \in \mathbf{L}_2\right),$$

по норме

$$\|\eta\|^2_{\mathbf{U}} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \mathbf{D}\xi_k \quad \left(\|\omega\|^2_{\mathbf{F}} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 \mathbf{D}\zeta_k\right).$$

Заметим, что в разных пространствах ($\mathbf{U_K L}_2$ и $\mathbf{F_K L}_2$) последовательность $\mathbf{K}$ может быть разной ($\mathbf{K} = \{\lambda_k\}$ в $\mathbf{U_K L}_2$ и $\mathbf{K} = \{\mu_k\}$ в $\mathbf{F_K L}_2$), однако все последовательности, отмеченные символом $\mathbf{K}$, должны быть монотонными и суммируемыми с квадратом. Все результаты, вообще говоря, будут верны при разных последовательностях $\{\lambda_k\}$ и $\{\mu_k\}$, однако простоты ради мы ограничимся случаем $\lambda_k = \mu_k$.

Пусть $A : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ – линейный оператор. Формулой

$$A\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k A\varphi_k \tag{10}$$

зададим линейный оператор $A : \mathbf{U_K L}_2 \to \mathbf{F_K L}_2$, причем если ряд в правой части (10) сходится (в метрике $\mathbf{F_K L}_2$), то $\xi \in \mathrm{dom}A$, а если расходится, то $\xi \notin \mathrm{dom}A$. Традиционно определяются пространства линейных непрерывных операторов $\mathcal{L}(\mathbf{U_K L}_2; \mathbf{F_K L}_2)$ и линейных замкнутых плотно определенных операторов. Справедливы

Лемма 1. *(i) Оператор* $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ *точно тогда, когда* $A \in \mathcal{L}(\mathbf{U_K L}_2; \mathbf{F_K L}_2)$.

Как нетрудно видеть,

$$\|A\xi\|_{\mathbf{F}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \mathbf{D}\xi_k \|A\varphi_k\|^2_{\mathfrak{F}} \leq \mathrm{const} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \mathbf{D}\xi_k = \mathrm{const}\, \|\xi\|_{\mathbf{U}}.$$

(ii) Оператор $A \in Cl(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ *точно тогда, когда* $A \in Cl(\mathbf{U_K L}_2; \mathbf{F_K L}_2)$.

Простоты ради положим $\mathfrak{U} = \{u \in W_2^2(\Omega) \oplus W_2^2(\Gamma) : \partial_R u = 0\}$, $\mathfrak{F} = L_2(\Omega) \oplus L_2(\Gamma)$. Далее, по алгоритму, изложенному выше, построим пространства *случайных* $\mathbf{K}$*-величин* . *Случайная* $\mathbf{K}$*-величина* $\xi \in \mathbf{U_K L}_2$ имеет вид

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k \varphi_k, \tag{11}$$

где $\{\varphi_k\}$ – семейство собственных функций модифицированного оператора Лапласа $\Delta_{r,\theta,\varphi} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ ортонормированных в смысле скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$ из $L_2(\Omega)$. Рассмотрим линейную стохастическую систему Вентцеля уравнение фильтрации влаги в шаре и на его границе. В этом случае (1), (2) преобразуется к виду

$$(\lambda - \Delta_{r,\theta,\varphi})\eta_t = \alpha\Delta_{r,\theta,\varphi}\eta + \beta\eta,\ \eta \in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{U_K L}_2), \tag{12}$$

$$(\lambda - \Delta_{\theta,\varphi})\eta_t = \gamma\Delta_{\theta,\varphi}\eta + \partial_R\eta + \delta\eta\ \eta \in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{U_K L}_2), \tag{13}$$

где

$$\Delta_{r,\theta,\varphi} = (r-R)\tfrac{\partial}{\partial r}\left((R-r)\tfrac{\partial}{\partial r}\right) + \tfrac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \tfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$$

$$\Delta_{\theta,\varphi} = \tfrac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \tfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}, \quad \partial_R = \tfrac{\partial}{\partial r}\Big|_{r=R}.$$

К данной системе присовокупим условие согласования и снабдим ее начальными условиями

$$\eta(0) = \eta_0 \tag{14}$$

Решение задачи (12) – (14) назовем стохастическим решением системы Вентцеля.

Теорема 2. *Для любого* $\eta_0 \in \mathbf{U_K L}_2(\Omega)$ *и коэффициентов* $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda \in \mathbb{R}$*, таких, что* $\alpha = \gamma$*,* $\beta = \delta$*, а* $\lambda \neq k^2$*, где* $k \in \mathbb{N}$*, существует единственное решение* $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{U_K L}_2)$ *стохастической системы Вентцеля* (12) – (14) .

Доказательство. Существование и единственность решения доказывается по аналогии с детерминированным случаем в силу справедливости леммы 1. □

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (код проекта 23-21-10056).

Литература

1. Баренблатт, Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24, № 5. – С. 852–864.
2. Гончаров, Н.С. Неединственность решений краевых задач с условием Вентцеля / Н.С. Гончаров, С.А. Загребина, Г.А. Свиридюк // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2021. – Т. 14, № 4. – С. 102–105.
3. Favini, A. Multipoint Initial-Final Value Problem for Dynamical Sobolev-Type Equation in the Space of Noises / A. Favini, S.A. Zagrebina, G.A. Sviridyuk // Electronic Journal of Differential Equations. – 2018. – V. 2018, № 128. – P. 1–10.
4. Favini, A. The Multipoint Initial-Final Value Condition for the Hoff Equations in Geometrical Graph in Spaces of K-«Noises» / A. Favini, S.A. Zagrebina, G.A. Sviridyuk // Mediterranean Journal of Mathematics. – 2022. – V. 19, № 2. – Article ID: 53.
5. Favini, A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Sectorial Operators in Space of «Noises»/ A. Favini, G.A. Sviridyuk, N.A. Manakova // Abstract and Applied Analysis. – 2015. – V. 2015. – Article ID: 697410.
6. Favini, A. One Class of Sobolev Type Equations of Higher Order with Additive «White Noise» / A. Favini, G.A. Sviridyuk, A.A. Zamyshlyaeva // Communications on Pure and Applied Analysis. – 2016. – V. 15, № 1. – P. 185–196.
7. Favini, A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Radial Operators in Space of «Noises» / A. Favini, G.A. Sviridyuk, M.A. Sagadeeva // Mediterranean Journal of Mathematics. – 2016. – V. 13, № 6. – P. 4607–4621.
8. Lions, J.L. Problems aux limites non homogenes et applications / J.L. Lions, E. Magenes. – Paris: Dunod, 1968.
9. Гончаров, Н.С. Задачи Шоуолтера – Сидорова и Коши для линейного уравнения Дзекцера с краевыми условиями Вентцеля и Робена в ограниченной области / Н.С. Гончаров, С.А. Загребина, Г.А. Свиридюк // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2022. – Т. 14, № 1. – С. 50–63.
10. Вентцель, А.Д. О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов / А.Д. Вентцель // Теория вероятности и ее применения. – 1959. – Т. 4, № 2. – С. 172–185.
11. Gliklikh, Yu.E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics, Theoretical and Mathematical Physics / Yu.E. Gliklikh. – London; Dordrecht; Heidelberg: Springer, 2011.

12. Kitaeva, O.G. Exponential Dichotomies in Barenblatt – Zheltov – Kochina Model in Spaces of Differential Forms with «Noise»/ O.G. Kitaeva, D.E. Shafranov, G.A. Sviridyuk // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. – 2019. – V. 12, № 2. – P. 47–57.
13. Goncharov, N.S. Stochastic Barenblatt – Zheltov – Kochina Model on the Interval with Wentzell Boundary Conditions / N.S. Goncharov // Global and Stochastic Analysis. – 2020. – V. 7, № 1. – P. 11–23.

Никита Сергеевич Гончаров, аспирант, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), goncharovns@susu.ru.

Георгий Анатольевич Свиридюк, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), sviridyukga@susu.ru.

Поступила в редакцию 3 августа 2023 г.

MSC 93E10 **DOI: 10.14529/mmp230406**

AN ANALYSIS OF THE WENTZELL STOCHASTIC SYSTEM OF THE EQUATIONS OF MOISTURE FILTRATION IN A BALL AND ON ITS BOUNDARY

***N.S. Goncharov*[1], *G.A. Sviridyuk*[1]**
[1]South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: goncharovns@susu.ru, sviridyukga@susu.ru

The deterministic and stochastic Wentzell systems of Barenblatt–Zheltov–Kochina equations describing moisture filtration in a three-dimensional ball and on its boundary are studied for the first time. In the deterministic case, the unambiguous solvability of the initial problem for the Wentzell system in a specifically constructed Hilbert space is established. In the stochastic case, the Nelson–Glicklich derivative is used and a stochastic solution is constructed, which allows us to predict quantitative changes in the geochemical regime of groundwater under pressureless filtration. For the filtration system under study, the non-classical Wentzell condition was considered, since it is represented by an equation with the Laplace–Beltrami operator defined on the boundary of the domain, understood as a smooth compact Riemannian manifold without an edge, and the external influence is represented by the normal derivative of the function defined in the domain.

Keywords: Wentzell system; Barenblatt–Zheltov–Kochina equation; Nelson–Glicklich derivative.

References

1. Barenblatt G.I., Zheltov Iu.P., Kochina I.N. Basic Concepts in the Theory of Seepage of Homogeneous Liquids in Fissured Rocks. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1960, vol. 24, no. 5, pp. 1286–1303.
2. Goncharov N.S., Zagrebina S.A., Sviridyuk G.A. Non-Uniqueness of Solutions to Boundary Value Problems with Wentzell Condition. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modeling, Programming and Computer Software*, 2021, vol. 14, no. 4, pp. 102–105. DOI: 10.14529/mmp210408
3. Favini A., Zagrebina S.A., Sviridyuk G.A. Multipoint Initial-Final Value Problem for Dynamical Sobolev-Type Equation in the Space of Noises. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2018, vol. 2018, no. 128, pp. 1–10.

4. Favini A., Zagrebina S.A., Sviridyuk G.A. The Multipoint Initial-Final Value Condition for the Hoff Equations in Geometrical Graph in Spaces of K-“Noises”. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2022, vol. 19, no. 2, article ID: 53. DOI: 10.1007/s00009-021-01940-0
5. Favini A., Sviridyuk G.A., Manakova N.A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Sectorial Operators in Space of Noises. *Abstract and Applied Analysis*, 2015, vol. 2015, article ID: 697410. DOI: 10.1155/2015/697410
6. Favini A., Sviridyuk G.A., Zamyshlyaeva A.A. One Class of Sobolev Type Equations of Higher Order with Additive “White Noise”. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 2016, vol. 15, no. 1, pp. 185–196. DOI: 10.3934/cpaa.2016.15.185
7. Favini A., Sviridyuk G.A., Sagadeeva M.A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Radial Operators in Space of “Noises”. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2016, vol. 13, no. 6, pp. 4607–4621.
8. Lions J.L., Magenes E. *Problems aux limites non homogenes et applications.* Paris, Dunod, 1968.
9. Goncharov N.S., Zagrebina S. A., Sviridyuk G. A. The Showalter–Sidorov and Cauchy Problems for the Linear Dzekzer Equation with Wentzell and Robin Boundary Conditions in a Bounded Domain. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics*, 2022, vol. 14, no. 1, pp. 50–63. DOI: 10.14529/mmph220106
10. Ventcel’ A.D. On Boundary Conditions for Multidimensional Diffusion Processes. *Theory of Probability and Its Applications*, 1959, vol. 4, pp. 164–177. DOI: 10.1137/1104014
11. Gliklikh Yu.E. *Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics, Theoretical and Mathematical Physics.* London, Dordrecht, Heidelberg, Springer, 2011.
12. Kitaeva O.G., Shafranov D.E., Sviridyuk G.A. Exponential Dichotomies in Barenblatt–Zheltov–Kochina Model in Spaces of Differential Forms with “Noise”. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modeling, Programming and Computer Software*, 2019, vol. 12, no. 2, pp. 47–57. DOI: 10.14529/mmp190204
13. Goncharov N.S. Stochastic Barenblatt–Zheltov–Kochina Model on the Interval with Wentzell Boundary Conditions. *Global and Stochastic Analysis*, 2020, vol. 7, no. 1, pp. 11–23.

Received August 3, 2023