УДК 517.544.8

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ СРЕД НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МАРКУШЕВИЧА В КЛАССЕ АВТОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

А.А. Патрушев

Предложен алгоритм явного решения краевой задачи Маркушевича в классе функций, автоморфных относительно фуксовой группы Г второго рода. Краевое условие задано на главной окружности. Коэффициенты задачи являются гельдеровскими функциями. Алгоритм основан на сведении задачи к краевой задаче Гильберта. Получено решение задачи в замкнутой форме при дополнительном ограничении, наложенном на один из коэффициентов задачи $b(t)$: если $\chi_+(t), \chi_-(t)$ – факторизационные множители коэффициента $a(t)$, то произведение функции $b(t)$ на частное от деления $\overline{\chi_+(t)})$ на $\chi_+(t)$ аналитически продолжимо в область D_- и автоморфно относительно Г в этой области.

Ключевые слова: краевые задачи для аналитических функций, задача Маркушевича, автоморфные функции.

Введение

Одной из математических моделей прочностных свойств разнообразных композиционных материалов, расчета электрических цепей, теории гетерогенных сред, теории фильтрации, теории оболочек и задач других разделов механики и физики является задача R-линейного сопряжения Маркушевича [1]. Задача Маркушевича особенно актуальна сегодня в связи с насущной необходимостью исследования кусочно-однородных (гетерогенных) сред, физические параметры которых на линиях соединений сред удовлетворяют во многих случаях условию R-линейного сопряжения Маркушевича. Хотя исследования по этой задаче ведутся давно (с середины прошлого века), тем не менее, точные решения задачи известны лишь для небольшого числа частных случаев, что лишний раз подтверждает высокую степень сложности проблемы построения точных решений задачи. Поэтому любые исследования в данном направлении являются актуальными, и любые новые результаты представляют научный и практический интерес. Особенно важны исследования, направленные на конструктивное построение решений указанной задачи.

1. Постановка задачи

Пусть $\Gamma : \sigma_0(z) \equiv z,\ \sigma_k(z),\ k = 1, 2, \ldots,$ – конечнопорожденная фуксова группа второго рода с областью инвариантности S, с неподвижной (главной) окружностью $L : |z - z_0| = r_0$, для которой ∞ является обыкновенной точкой. Известно, что такая группа является группой первого класса, то есть ряд $\sum\limits_{0}^{\infty} |\sigma_k'(z)|$ сходится на любом компактном множестве, не содержащем предельных точек группы и точек $\sigma_k(\infty)$ [2]. Пусть R_0 – фундаментальная область Форда, ρ – род фундаментальной области, $D_\pm$ – внутренность и внешность окружности $L : |z - z_0| = r_0$ соответственно, $R_\pm = R_0 \cap D_\pm,\ L_*$ – множество дуг главной окружности, получаемой из L удалением всех предельных точек группы. Требуется найти кусочно аналитическую функцию $\psi(z)$, автоморфную относительно группы Γ , исчезающую на бесконечности, если на контуре $L_0 = L_* \cap R_0$ ее краевые значения удовлетворяют условию

$$\psi_+(t) = a(t)\psi_-(t) + b(t)\overline{\psi_+(t)}, t \in L_0. \tag{1}$$

Полной теории разрешимости задачи (1) в настоящее время нет. В представленной работе задача решена при следующих ограничениях, наложенных на коэффициенты: $a(t) \neq 0$, $b_1(t) + 1 \neq 0$ на L, где функция $b_1(t) = \dfrac{\overline{\chi_+(t)}}{\chi_+(t)} b(t)$ аналитически продолжима в область D_- и автоморфна относительно Γ в этой области. Здесь $\chi_+(t), \chi_-(t)$ – факторизационные множители коэффициента $a(t)$. В данной работе получил дальнейшее развитие метод нахождения решения задачи Маркушевича в явном виде, разработанный в статье [6]. Этот метод отличается от рассмотренного в статьях [3–5], что обусловлено различными постановками задачи. Идея предложенного метода заключается в сведении задачи Маркушевича к сингулярному интегральному уравнению относительно $\operatorname{Re}\psi_+(t)$ с последующим решением скалярной задачи Гильберта в классе автоморфных функций. Решение задачи Маркушевича (1) представлено в замкнутой форме при допущении, что проблема обращения Якоби решена.

2. Сведение задачи к сингулярному интегральному уравнению

Как известно [7], если $a(t) \neq 0$, $t \in L_0$, – гельдеровская функция, то функцию $a(t)$ можно представить в виде

$$a(t) = \frac{\chi_+(t)}{\chi_-(t)}, \tag{2}$$

где

$$\chi(z) = e^{\Gamma(z)} E^{-\varkappa}(z, t_0, \theta_0) \prod_{j=1}^{\rho} E(z, \theta_j, \theta_0) \prod_{j=1}^{n} E^{m_j}(z, \sigma_j(\theta_0), \theta_0),\ \varkappa = \operatorname{Ind}_{L_0}[a(t)], \tag{3}$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L0} K(z,\tau) \ln a(\tau) d\tau, K(z,\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sigma_j'(\tau)}{\sigma_j(\tau) - z} = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\tau - \sigma_j(z)} - \frac{1}{\tau - \sigma_j(\infty)} \right],$$

$\sigma_1(z), \ldots, \sigma_n(z)$ – порождающие преобразования группы Γ, $t_0 \in L_0$ – фиксированная точка; точки $\theta_j \in R_-$, $\theta_j \neq \theta_0$, $j = 1, \ldots, \rho$, где θ_0 – фиксированная точка области R_-; $m_j, j = 1, \ldots, n$, – целые числа. Функция

$$E(z, \theta, \theta_0) = \exp\left(\int\limits_{\theta_0}^{\theta} K(z,\tau) d\tau \right),$$

где $K(z,\tau)$ – квазиавтоморфный аналог ядра Коши, берется вдоль пути, целиком расположенного в S. Она однозначна в этой области и, в случае неконгруэнтных между собой точек θ_0 и θ, имеет в этих точках простой полюс и нуль кратности 1, соответственно. Если точки θ_0 и θ между собою конгруэнтны, то $E(z, \theta, \theta_0)$ на множестве S ограничена и нигде не обращается в нуль. Так как

$$\chi(\sigma_k(z)) = \chi(z) e^{H_k}, \forall z \in S \backslash L,$$

$$H_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_0} \eta_k(\tau) \ln a(\tau) d\tau - \varkappa \int\limits_{\theta_0}^{t_0} \eta_k(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^{\rho} \int\limits_{\theta_0}^{\theta_j} \eta_k(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^{n} m_j \int\limits_{\theta_0}^{\sigma_j(\theta_0)} \eta_k(\tau) d\tau,\ k = 1, 2, \ldots,$$

то для автоморфности канонической функции $\chi(z)$ необходимо потребовать, чтобы все $H_k \equiv 0(\mathrm{mod}\, 2\pi \mathrm{i})$. То есть целые числа $m_j, j = 1, \ldots, n$, и точки $\theta_j \in R_-$, $\theta_j \neq \theta_0$, $j = 1, \ldots, \rho$, должны являться решением проблемы Якоби обращения интегралов $\varphi_k(z) = \int\limits_{\theta_0}^{z} \eta_k(\tau)d\tau$, $k = 1, \ldots, \rho$,

$$\sum_{j=1}^{\rho} \varphi_k(\theta_j) + \sum_{j=1}^{n} m_j \eta_{k,j} + n_k 2\pi i = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_0} \eta_k(\tau) \ln a(\tau) d\tau + \varkappa \varphi_k(t_0),$$

где n_k, $k = 1, \ldots, \rho$, – некоторые целые числа, $\eta_{k,j} = \varphi_k(\sigma_j(z)) - \varphi_k(z) = \int\limits_{\theta_0}^{\sigma_j(\theta_0)} \eta_k(\tau)d\tau$, $j = 1, \ldots, n$. Один из методов решения проблемы обращения Якоби с использованием специальной Θ-функции Римана был предложен в работе Э.И. Зверовича [8]. Функция $\chi(z)$ автоморфна относительно группы дробно-линейных преобразований Γ, имеет в точках $\theta_1, \ldots, \theta_m$, образующих решение проблемы обращения Якоби, нули кратности $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, соответственно, а в точке θ_0 имеет порядок $\varkappa - \rho$.

На основании вышеизложенного краевое условие (1) запишется в виде :

$$\phi_+(t) = \frac{1}{b_1(t)+1}\phi_-(t) + \frac{2b_1(t)}{b_1(t)+1}\mathrm{Re}\,\phi_+(t) + g(t), \tag{4}$$

где

$$g(t) = \frac{f(t)}{\chi_+(t)(b_1(t)+1)}, \phi_\pm(t) = \frac{\psi\pm(t)}{\chi_\pm(t)},\ b_1(t) = b(t)\frac{\overline{\chi_+(t)}}{\chi_+(t)}. \tag{5}$$

.Функция $\phi(z)$, удовлетворяющая краевому условию (4), имеет полюсы в точках $\theta_1, \ldots, \theta_m \in R_-$ соответственно кратности $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, исчезает на бесконечности и имеет порядок $\rho - \varkappa$ в точке $\theta_0 \in R_-$.

Пусть $\varkappa_1 = \mathrm{Ind}_{L_0}[b_1(t)+1]$. Решение полученной задачи (4), где предполагается $\mathrm{Re}\,\phi_+(t)$ известной, запишется следующим образом [9]:

$$\phi(z) = \chi_0(z)(F(z) + \Psi_0(z) + \Psi_1(z) + \Psi_2(z)). \tag{6}$$

Здесь

$$\chi_0(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } z \in D_+, \\ b_1(z)+1, & \text{если } z \in D_-, \end{cases}$$

– каноническая функция,

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\left[\frac{2b_1(\tau)}{b_1(\tau)+1}\mathrm{Re}\,\phi_+(\tau) + g(\tau)\right]A(z,\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\left[\frac{2b_1(\tau)}{b_1(\tau)+1}\mathrm{Re}\,\phi_+(\tau) + g(\tau)\right]K(z,\tau)d\tau - \sum_{j=1}^{\rho} d_j K(z,a_j) - \sum_{j=1}^{\rho} \delta_j K(z,a_j),$$

$$d_j = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{2b_1(\tau)}{b_1(\tau)+1}\mathrm{Re}\,\phi_+(\tau)\omega_j(\tau)d\tau,\ \delta_j = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} g(\tau)\omega_j(\tau)d\tau,\ j = 1, \ldots, \rho;$$

$$\Psi_0(z) = C + \sum_{q=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{\lambda_q} c_{q,\nu}\zeta_\nu(z,\theta_q),\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = \rho;$$

$$\zeta_\nu(z,\theta_q)=\sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(\sigma_j(z)-\theta_q)^\nu}-\frac{1}{(\sigma_j(\infty)-\theta_q)^\nu}\right]-\sum_{j=1}^{\rho}d_{j,\nu}^{(q)}K(z,a_j);$$

$$d_{j,\nu}^{(q)}=-\frac{\omega_j^{(\nu-1)}(\theta_q)}{(\nu-1)!},\ q=0,\ldots,m,\ \nu=1,2,\ldots;\ \varkappa_1=\mathrm{Ind}_{L_0}[b_1(t)+1];$$

$$\Psi_1(z)=\begin{cases}\sum\limits_{\nu=1}^{\varkappa-\rho}c_\nu\zeta_\nu(z,\theta_0), & \varkappa>\rho,\\ 0, & \varkappa\le\rho.\end{cases};\ \Psi_2(z)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{-\varkappa_1-1}b_k\xi_k(z,\infty), & \varkappa_1\le 0,\\ 0, & \varkappa_1>0.\end{cases}$$

Автоморфный аналог ядра Коши $A(z,\tau)$ имеет вид [7]:

$$A(z,\tau)=K(z,\tau)-\omega_1(\tau)K(z,a_1)-\ldots-\omega_\rho(\tau)K(z,a_\rho),$$

где ρ – род фундаментальной области R_0. Здесь предполагается, что бесконечность не является неподвижной точкой преобразования группы Γ. Функции

$$\xi_k(z,\infty)=z^k+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sigma_j^k(z)-\sigma_j^k(\infty)\right)-\sum_{j=1}^{\rho}\frac{\omega_j^{k-1}(\infty)}{(k-1)!}K(z,a_j),\ k=1,\ldots,-\varkappa_1-1,$$

являются коэффициентами разложения ядра $A(z,\tau)$ в окрестности $\tau=\infty$. В точках $a_j\in R_+,\ j=1,\ldots,\rho$, ядро $A(z,\tau)$ имеет простые полюсы с вычетами $\omega_j(\tau),\ j=1,\ldots,\rho$, соответственно [10].

Функция $\phi(z)$ имеет в точках $a_j,\ j=1,\ldots,\rho$, простые полюсы с вычетами

$$h_j=d_j+\delta_j-\sum_{k=1}^{-\varkappa_1-1}b_k\frac{\omega_j^{(k-1)}(\infty)}{(k-1)!}-\sum_{q=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{\lambda_q}c_{q,\nu}d_{j,\nu}^{(q)}-\sum_{\nu=1}^{\varkappa-\rho}c_\nu d_{j,\nu}^{(0)}\ ,j=1,\ldots,\rho. \tag{7}$$

Если $\varkappa_1>0$, то общее решение задачи (4) определится формулой

$$\phi(z)=\chi_0(z)(F(z)+\Psi_0(z)+\Psi_1(z)),$$

если выполняются $\varkappa_1$ условий разрешимости

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{2b_1(\tau)\mathrm{Re}\,\phi_+(\tau)}{[b_1(\tau)+1]}\eta_{k-1}(\tau,\infty)d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}g(\tau)\eta_{k-1}(\tau,\infty)d\tau=\beta_{k-1}, \tag{8}$$

$$\beta_{k-1}=-\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[\Psi_0(z)+\Psi_1(z)]\Big|_{z=\infty},\ k=1,\ldots,\varkappa_1.$$

Здесь $\eta_k(\tau,\infty)$ – коэффициенты разложения ядра $A(z,\tau)$ в окрестности точки $z=\infty$. Рассмотрим случай $\varkappa<\rho,\ \ \varkappa_1\le 0$. Тогда формула

$$\phi(z)=\chi_0(z)(F(z)+\Psi_0(z)+\Psi_2(z))$$

определяет общее решение задачи (4), если выполняются $\rho-\varkappa$ комплексных условий разрешимости

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{2b_1(\tau)\mathrm{Re}\,\phi_+(\tau)}{[b_1(\tau)+1]}\eta_k(\tau,\theta_0)d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}g(\tau)\eta_k(\tau,\theta_0)d\tau=\beta_k^1, \tag{9}$$

$$\beta_k^1 = -\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[\Psi_0(z)+\Psi_2(z)\right]\Bigg|_{z=\theta_0},\ k=1,\ldots,\rho-\varkappa.$$

Рассмотрим последний случай: $\varkappa<\rho,\ \ \varkappa_1>0$. Тогда общее решение задачи (4) определится формулой

$$\phi(z)=\chi_0(z)(F(z)+\Psi_0(z)).$$

Условия разрешимости запишутся в этом случае, соответственно, следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{2b_1(\tau)\mathrm{Re}\,\phi_+(\tau)}{[b_1(\tau)+1]}\eta_{k-1}(\tau,\infty)d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}g(\tau)\eta_{k-1}(\tau,\infty)d\tau=\beta_{k-1}, \tag{10}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{2b_1(\tau)\mathrm{Re}\,\phi_+(\tau)}{[b_1(\tau)+1]}\eta_{k}(\tau,\theta_0)d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}g(\tau)\eta_{k}(\tau,\theta_0)d\tau=\beta_k^1, \tag{11}$$

$$\beta_{k-1}=-\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\Psi_0(z)\Bigg|_{z=\infty},\ k=1,\ldots,\varkappa_1,\ \beta_k^1=-\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}}\Psi_0(z)\Bigg|_{z=\theta_0},\ k=1,\ldots,\rho-\varkappa.$$

Построенная функция $\phi(z)$ является кусочно аналитической в области R_0 и автоморфной относительно группы Γ, за исключением точек $a_j\in R_+, j=1,\ldots,\rho$, в которых она имеет простые полюсы.

На основании формул Сохоцкого из равенства (6) на контуре L_0 имеем :

$$\phi_+(t)=\frac{b_1(t)}{b_1(t)+1}\mathrm{Re}\,\phi_+(t)+\frac{g(t)}{2}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{b_1(\tau)}{b_1(\tau)+1}\mathrm{Re}\,\phi_+(\tau)A(t,\tau)d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}g(\tau)A(t,\tau)d\tau+\Phi(t), \tag{12}$$

где $\Phi(t)=\Psi_0(t)+\Psi_1(t)+\Psi_2(t)$.

С другой стороны, заметим, что функция $\phi_+(z)$ определяется в области R_+ с точностью до мнимого постоянного через значение своей действительной части на контуре L_0 :

$$\phi_+(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L_0}\mathrm{Re}\,\phi_+(\tau)A(z,\tau)d\tau+\zeta(z)+\beta+ic. \tag{13}$$

Здесь

$$\zeta(z)=\sum_{j=1}^{\rho}\gamma_jK(z,a_j)-\sum_{j=1}^{\rho}\frac{(a_{\rho+j}-z_0)^2}{r_0^2}\overline{\gamma_j}K(z,a_{\rho+j}),\ a_{\rho+j}=z_0+\frac{r_0^2}{\overline{a_j}-\overline{z_0}},$$

$$\gamma_j=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\mathrm{Re}\,\phi_+(\tau)\omega_j(\tau)d\tau,\ j=1,\ldots,\rho,\ \beta=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\mathrm{Re}\,\phi_+(\tau)A(z_0,\tau)d\tau-\zeta(z_0).$$

Вычеты функции $\phi_+(z)$ в точках $a_j\in R_+,\ j=1,\ldots,\rho$, равны соответственно $-\gamma_j,\ j=1,\ldots,\rho$.

Так как функция $\phi_+(z)$ в области D_+ должна быть аналитична, потребуем, чтобы вычеты этой функции в точках $a_j\in R_+,\ j=1,\ldots,\rho$, равнялись нулю, то есть:

$$\left\{\begin{array}{r}\gamma_j=0,\\ s_j+\delta_j=0,\end{array}\right.,\ j=1,\ldots,\rho, \tag{14}$$

$$s_j=-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{\mathrm{Re}\,\psi_+(\tau)}{b_1(\tau)+1}\omega_j(\tau)d\tau-\sum_{k=1}^{-\varkappa_1-1}b_k\frac{\omega_j^{(k-1)}(\infty)}{(k-1)!}-\sum_{q=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{\lambda_q}c_{q,\nu}d_{j,\nu}^{(q)}-\sum_{\nu=1}^{\varkappa-\rho}c_\nu d_{j,\nu}^{(0)}\ ,$$

$$\delta_j = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_0} g(\tau)\omega_j(\tau) d\tau, \ j = 1, \ldots, \rho.$$

Здесь $\gamma_j, j = 1, \ldots, \rho,$ – вычеты в точках $a_j \in R_+, \ j = 1, \ldots, \rho$, функции $\phi_+(z)$, являющейся решением задачи Шварца; $s_j + \delta_j = h_j, j = 1, \ldots, \rho,$ – вычеты в тех же точках функции $\phi_+(z)$, являющейся решением задачи (4), рассматриваемой как задача Римана. Из соотношения (13) имеем на контуре L_0:

$$\phi_+(t) = \mathrm{Re}\,\phi_+(t) + \frac{1}{\pi i} \int\limits_{L_0} \mathrm{Re}\,\phi_+(\tau) A(t,\tau) d\tau + \zeta(t) + \beta + ic. \tag{15}$$

Откуда, сравнивая выражения (12), (15), приходим к сингулярному интегральному уравнению

$$\frac{\mathrm{Re}\,\phi_+(t)}{b(t)+1} + \frac{1}{\pi i} \int\limits_{L_0} \frac{\mathrm{Re}\,\phi+(\tau)}{b(\tau)+1} A(t,\tau) d\tau = \frac{g(t)}{2} + + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_0} g(\tau) A(t,\tau) d\tau \ + \Phi(t) - \zeta(t) + d,$$

где $d = -\beta - ic$.

3. Постановка и решение задачи Гильберта относительно функции $\varphi_1^-(z)$

Для однозначной кусочно аналитической функции

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_0} \left[\frac{2\mathrm{Re}\,\phi_+(\tau)}{b_1(\tau)+1} - g(\tau) \right] A(z,\tau) d\tau \tag{16}$$

сингулярное интегральное уравнение, на основании автоморфных аналогов формул Сохоцкого, сводится к односторонней краевой задаче

$$\Psi^+(t) = \Phi(t) - \zeta(t) + d, \tag{17}$$

в классе Γ-автоморфных функций, имеющих простые полюсы в точках $a_j \in R_+, \ j = 1, \ldots, \rho$, и исчезающих на бесконечности. Заметим здесь, что функция

$$\Phi(z) - \zeta(z) + d$$

Γ – автоморфна в области D_+, кроме точек $a_j \in R_+, \ j = 1, \ldots, \rho$, и точек, конгруэнтных им, в которых она имеет простые полюсы. Поэтому решение задачи (17), по аналогии с односторонней краевой задачей Римана, запишется в виде [11]:

$$\Psi(z) = \begin{cases} \Phi(z) - \zeta(z) + d, & z \in D_+, \\ \varphi_1^-(z), & z \in D_-, \end{cases} \tag{18}$$

где $\varphi_1^-(z)$ – произвольная аналитическая в области D_- функция, исчезающая на бесконечности и автоморфная относительно группы Γ.

В точке z_0, очевидно, должно выполняться равенство

$$\Psi(z_0) = \Phi(z_0) - \zeta(z_0) + d. \tag{19}$$

На основании (16), (18) имеем

$$\frac{\mathrm{Re}\,\phi_+(t)}{b_1(t)+1} = \frac{1}{2} \left[\Phi(t) - \zeta(t) + d + g(t) - \varphi_1^-(t) \right], \ t \in L_0. \tag{20}$$

Учитывая, что в левой части выражения (20) имеется действительнозначная функция $\mathrm{Re}\,\phi_+(t)$, приходим для функции $\varphi_1^-(z)$ к краевой задаче Гильберта в классе автоморфных относительно группы Г функций

$$\mathrm{Re}\left\{-i[b_1(t)+1]\varphi_1^-(t)\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[(b_1(t)+1)(\Phi(t)-\zeta(t)+d+g(t))\right]. \tag{21}$$

Решение этой задачи запишется в виде [10]:

$$-i\varphi_1^-(z) = \frac{1}{b_1(z)+1}\left[F_0(z)+F_1(z)+Q_{\varkappa_1-1}(z)+\overline{Q_{\varkappa_1-1}(z^*)}\right]. \tag{22}$$

Здесь

$$F_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} c_0(\tau)A(z,\tau)d\tau + \zeta^0(z)+\beta^0;\ F_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} c_1(\tau)A(z,\tau)d\tau + \zeta^{01}(z)+\beta^{01};$$

$$c_0(\tau) = \mathrm{Im}\left[(b_1(t)+1)(\Phi(t)-\zeta(t)+d)\right];\ c_1(\tau) = \mathrm{Im}\left[(b_1(\tau)+1)g(\tau)\right] = \mathrm{Im}\left[\frac{f(\tau)}{\chi_+(\tau)}\right];$$

$$\zeta^0(z) = \sum_{j=1}^{\rho}\gamma_j^0 K(z,a_j) - \sum_{j=1}^{\rho}\frac{(a_{\rho+j}-z_0)^2}{r_0^2}\overline{\gamma_j^0}K(z,a_{\rho+j});$$

$$\beta^0 = -\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{L_0} c_0(\tau)A(z_0,\tau)d\tau - \zeta^0(z_0);\ \gamma_j^0 = \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{L_0} c_0(\tau)\omega_j(\tau)d\tau,\ j=1,\ldots,\rho;$$

$$\zeta^{01}(z) = \sum_{j=1}^{\rho}\gamma_j^{01} K(z,a_j) - \sum_{j=1}^{\rho}\frac{(a_{\rho+j}-z_0)^2}{r_0^2}\overline{\gamma_j^{01}}K(z,a_{\rho+j});$$

$$\gamma_j^{01} = \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{L_0} c_1(\tau)\omega_j(\tau)d\tau, j=1,\ldots,\rho;\quad \beta^{01} = -\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{L_0} c_1(\tau)A(z_0,\tau)d\tau - \zeta^{01}(z_0);$$

$$Q_{\varkappa_1-1}(z) = \begin{cases} \alpha_0 + \sum\limits_{k=1}^{\varkappa_1-1}\alpha_k\xi_k(z,\infty), & \varkappa_1>0,\\ 0, & \varkappa_1\le 0.\end{cases}$$

Если $\varkappa_1 \le 0$ ($Q_{\varkappa_1-1}(z)\equiv 0$),) то мы имеем $-\varkappa_1+1$ условий разрешимости

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} c_0(\tau)\eta_{k-1}(\tau,\infty)d\tau - \beta_{k-1}^0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} c_1(\tau)\eta_{k-1}(\tau,\infty)d\tau + \beta_{k-1}^{01}, \tag{23}$$

где

$$\beta_{k-1}^0 = -\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[\zeta^0(z)+\beta^0]\Bigg|_{z=\infty},\ \beta_{k-1}^{01} = -\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[\zeta^{01}(z)+\beta^{01}]\Bigg|_{z=\infty}, k=1,\ldots,-\varkappa_1+1.$$

Для аналитичности функции $\varphi_1^-(z)$ в точках $a_{\rho+j}\in R_-,\ j=1,\ldots,\rho$, потребуем, чтобы вычеты функции в этих точках обращались в нуль, а именно:

$$\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{L_0} c_0(\tau)\omega_j(\tau)d\tau - \sum_{k=1}^{\varkappa_1-1}\alpha_k\frac{\omega_j^{(k-1)}(\infty)}{(k-1)!} = -\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{L_0} c_1(\tau)\omega_j(\tau)d\tau,\quad \text{если } \varkappa_1>0; \tag{24}$$

$$\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{L_0} c_0(\tau)\omega_j(\tau)d\tau = -\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{L_0} c_1(\tau)\omega_j(\tau)d\tau,,\quad \text{если } \varkappa_1\le 0,\quad j=1,\ldots,\rho. \tag{25}$$

4. Нахождение $\mathrm{Re}\phi_+(t)$ и решения задачи Маркушевича

Пусть $\varphi_1^-(z)$ является решением задачи Гильберта (21). Так как

$$\frac{\mathrm{Re}\,\phi_+(t)}{b_1(t)+1} = \frac{1}{2}\left[\Phi(t) - \zeta(t) + d + g(t) - \varphi_1^-(t)\right],\ t \in L_0,$$

а функция $\varphi_1^-(z)$ аналитична в области D_- и исчезает на бесконечности, то условия разрешимости (14) можно переписать в виде:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}(b_1(\tau)+1)\left[\Phi(\tau) - \zeta(\tau) + d\right]\omega_j(\tau)d\tau - \\ -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_0}\left[F_0(\tau) + Q_{\varkappa_1 - 1}(\tau) + \overline{Q_{\varkappa_1 - 1}(\tau)}\right]\omega_j(\tau)d\tau = e_j,\ j = 1, \ldots, \rho,\end{gathered} \tag{26}$$

$$e_j = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_0} F_1(\tau)\omega_j(\tau)d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{f(\tau)}{\chi_+(\tau)}\omega_j(\tau)d\tau,\quad j = 1, \ldots, \rho.$$

На основании формул (20), (22) имеем на контуре L_0

$$\begin{gathered}\mathrm{Re}\,\phi_+(t) = \frac{[b_1(t)+1]}{2}\left[\Phi(t) - \zeta(t) + d + g(t)\right] - \\ -i[F_0^-(t) + F_1^-(t) + Q_{\varkappa_1 - 1}(t) + \overline{Q_{\varkappa_1 - 1}(t)}].\end{gathered} \tag{27}$$

Из соотношений (6), (27) следует, что функция

$$\phi(z) = \begin{cases} F(z) + \Phi(z), & \text{если } z \in D_+, \\ (b_1(z)+1)[F(z) + \Phi(z)], & \text{если } z \in D_-, \end{cases} \tag{28}$$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} c(\tau)b_1(\tau)A(z,\tau)d\tau + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} f_1(\tau)b_1(\tau)A(z,\tau)d\tau,$$

$$f_1(\tau) = \frac{f(t)}{\chi_+(t)b_1(t)} - \frac{2i}{b_1(\tau)+1}F_1^-(\tau),$$

удовлетворяет краевому условию (4). Здесь

$$\begin{gathered}\Phi(z) = \Psi_0(z) + \Psi_1(z),\ c(\tau) = [\Phi(\tau) - \zeta(\tau) + d] - \\ -\frac{2i}{b_1(\tau)+1}\left[F_0^-(\tau) + Q_{\varkappa_1 - 1}(\tau) + \overline{Q_{\varkappa_1 - 1}(\tau)}\right],\ \text{если } \varkappa_1 > 0,\end{gathered} \tag{29}$$

и

$$\begin{gathered}\Phi(z) = \Psi_0(z) + \Psi_1(z) + \Psi_2(z),\ c(\tau) = [\Phi(\tau) - \zeta(\tau) + d] - \\ -\frac{2i}{b_1(\tau)+1}F_0^-(\tau),\ \text{если } \varkappa_1 \le 0.\end{gathered} \tag{30}$$

Условия разрешимости (8), (9), на основании вышеизложенного, соответственно, запишутся в явном виде:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} b_1(\tau)c(\tau)\eta_{k-1}(\tau,\infty)d\tau - \beta_{k-1} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} b_1(\tau)f_1(\tau)\eta_{k-1}(\tau,\infty)d\tau, \tag{31}$$

$$\beta_{k-1} = -\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[\Psi_0(z) + \Psi_1(z)]\bigg|_{z=\infty},\ k = 1, \ldots, \varkappa_1,\ \text{если } \varkappa_1 > 0;$$

и

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} b_1(\tau)c(\tau)\eta_k(t,\theta_0)d\tau - \beta_k = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} b_1(\tau)f_1(\tau)\eta_k(t,\theta_0)d\tau, \tag{32}$$

$$\beta_k^1 = -\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[\Psi_0(z)+\Psi_2(z)\right]\Bigg|_{z=\theta_0}, \; k=1,\ldots,\rho-\varkappa, \text{ если } \varkappa\le\rho.$$

Построенная функция $\phi(z)$ будет являться решением задачи, если выполняются ρ комплексных условий разрешимости (24) или (27) и ρ комплексных условий разрешимости (26), что обеспечивает аналитичность функции в точках $a_j \in R_+,\ j=1,\ldots,\rho$.

На основании проведенных выкладок, а также формул (2), (3), (5), общее решение неоднородной задачи Маркушевича (1) запишется в виде:

$$\psi(z) = \begin{cases} \chi_+(z)\left[F(z)+\Phi(z)\right], & \text{если } z\in D_+, \\ \chi_-(z)(b_1(z)+1)\Big[F(z)+\Phi(z)\Big], & \text{если } z\in D_-, \end{cases} \tag{33}$$

где функции $\Phi(z)$, $F(z)$, $\chi(z)$ определяются из формул (28), (29) или (30), (3).

Рассмотрим несколько случаев.

1) $\varkappa>\rho$, $\varkappa_1>0$. В этом случае $\Psi_2(z)\equiv 0$, функция $c(t)$, определяемая формулой (29), содержит $\varkappa+\varkappa_1$ комплексных постоянных. Эти постоянные должны удовлетворять 2ρ комплексным условиям разрешимости (24), (26), а также $\varkappa_1$ комплексным условиям разрешимости (31). Пусть r – ранг матрицы коэффициентов объединенной неоднородной системы линейных уравнений (24), (26), (31). Как известно, полученная объединенная неоднородная система разрешима тогда и только тогда, когда

$$\sum_{\nu=1}^{\rho} N_{\nu,k}s_\nu^0 + \sum_{\nu=1}^{\rho} K_{\nu,k}e_\nu + \sum_{\nu_1=1}^{\varkappa_1} L_{\nu_1,k}\alpha_{\nu_1} = 0,\; k=1,\ldots,2\rho+\varkappa_1-r, \tag{34}$$

где

$$s_\nu^0 = -\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{L_0} c_1(\tau)\omega_\nu(\tau)d\tau,\; e_\nu = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_0} F_1(\tau)\omega_\nu(\tau)d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{f(\tau)}{\chi_+(\tau)}\omega_\nu(\tau)d\tau,\;\; \nu=1,\ldots,\rho,$$

$$\alpha_{\nu_1} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} b_1(\tau)f_1(\tau)\eta_{\nu_1-1}(\tau,\infty)d\tau,\; \nu_1=1,\ldots,\varkappa_1.$$

Здесь $N_{\nu,k},\ K_{\nu,k},\ L_{\nu_1,k}$ $(\nu=1,\ldots,\rho,\ \nu_1=1,\ldots,\varkappa_1,\ k=1,\ldots,2\rho+\varkappa_1- -r)$ – полная система линейно независимых решений соответствующей однородной транспонированной системы. При выполнении этих условий общее решение неоднородной задачи Маркушевича содержит $\varkappa+\varkappa_1-r$ произвольных комплексных постоянных. Если $r=\varkappa+\varkappa_1$, то задача имеет единственное решение.

2) $\varkappa\le\rho$, $\varkappa_1>0$. Так как $\Psi_2(z)\equiv 0$, $\Psi_1(z)\equiv 0$, то функция $c(t)$ содержит $\varkappa_1+\rho$ комплексных постоянных. Они должны удовлетворять 2ρ комплексным условиям разрешимости (24), (26), $\varkappa_1$ комплексным условиям разрешимости (31) и $\rho-\varkappa$ условиям разрешимости (32). Пусть r_1 – ранг матрицы коэффициентов объединенной неоднородной системы линейных уравнений (24), (26), (31), (32). Полученная объединенная неоднородная система разрешима тогда и только тогда, когда

$$\sum_{\nu=1}^{\rho} N_{\nu,k}s_\nu^0 + \sum_{\nu=1}^{\rho} K_{\nu,k}e_\nu + \sum_{\nu=1}^{\varkappa_1} L_{\nu_1,k}\alpha_\nu + \sum_{\nu=1}^{\rho-\varkappa} T_{\nu_2,k}\xi_\nu = 0, \tag{35}$$

$k = 1, \ldots, 3\rho + \varkappa_1 - \varkappa - r_1,\ \ \xi_{\nu_2} = -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{L_0} b_1(\tau) f_1(\tau)\eta_{\nu_2}(t, \theta_0)d\tau,\ \nu_2 = 1, \ldots, \rho - \varkappa$. Здесь $N_{\nu,k},\ K_{\nu,k},\ L_{\nu_1,k},\ T_{\nu_2,k}$ $(\nu = 1, \ldots, \rho,\ k = 1, \ldots, 3\rho + \varkappa_1 - \varkappa - r_1,\ \nu_1 = 1, \ldots, \varkappa_1,\ \nu_2 = 1, \ldots, \rho - \varkappa,)$ – полная система линейно независимых решений соответствующей однородной транспонированной системы. При выполнении этих условий общее решение неоднородной задачи Маркушевича содержит $\varkappa_1 + \rho - r_1$ произвольных комплексных постоянных. Если $r_1 = \rho + \varkappa_1$, то задача имеет единственное решение.

3) $\varkappa > \rho,\ \ \varkappa_1 \le 0$. Тогда $Q_{\varkappa_1 - 1}(\tau) \equiv 0$, функция $c(t)$, определяемая формулой (30), содержит $\varkappa - \varkappa_1$ комплексных постоянных. Эти постоянные должны удовлетворять 2ρ комплексным условиям разрешимости (27), (26), $-\varkappa_1 + 1$ комплексным условиям разрешимости (23). Пусть r_2 – ранг матрицы коэффициентов объединенной неоднородной системы линейных уравнений (27), (26), (23). Объединенная неоднородная система разрешима тогда и только тогда, когда

$$\sum_{\nu=1}^{\rho} N_{\nu,k} s_\nu^0 + \sum_{\nu=1}^{\rho} K_{\nu,k} e_\nu + \sum_{\nu=1}^{-\varkappa_1+1} M_{\nu_3,k} t_{\nu_3}^0 = 0,\ k = 1, \ldots, 2\rho - \varkappa_1 + 1 - r_2, \tag{36}$$

где

$$t_{\nu_3}^0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} c_1(\tau)\eta_{\nu_3 - 1}(\tau, \infty)d\tau + \beta_{\nu_3-1}^0,\ \nu_3 = 1, \ldots, -\varkappa_1 + 1.$$

Здесь $N_{\nu,k},\ K_{\nu,k},\ M_{\nu_3,k}$ $(\nu = 1, \ldots, \rho,\ k = 1, \ldots, 2\rho - \varkappa_1 + 1 - r_2,\ \nu_3 = = 1, \ldots, -\varkappa_1 + 1)$ – полная система линейно независимых решений соответствующей однородной транспонированной системы. При выполнении этих условий общее решение неоднородной задачи Маркушевича содержит $\varkappa - \varkappa_1 - r_2$ произвольных комплексных постоянных. Если $r_2 = \varkappa - \varkappa_1$, то задача имеет единственное решение.

4) $\varkappa \le \rho,\ \varkappa_1 \le 0$. В этом случае $Q_{\varkappa_1 - 1}(\tau) \equiv 0,\ \Psi_1(z) \equiv 0$, функция $c(t)$ содержит $\rho - \varkappa_1$ комплексных постоянных. Эти постоянные должны удовлетворять 2ρ комплексным условиям разрешимости (27), (26), $-\varkappa_1 + 1$ комплексным условиям разрешимости (23) и $\rho - \varkappa$ комплексным условиям разрешимости (32). Пусть r_3 – ранг матрицы коэффициентов объединенной неоднородной системы линейных уравнений (27), (26), (23), (32). Полученная объединенная неоднородная система разрешима тогда и только тогда, когда

$$\sum_{\nu=1}^{\rho} N_{\nu,k} s_\nu^0 + \sum_{\nu=1}^{\rho} K_{\nu,k} e_\nu + \sum_{\nu=1}^{-\varkappa_1+1} M_{\nu_3,k} t_{\nu_3}^0 + \sum_{\nu=1}^{\rho-\varkappa} T_{\nu_2,k}\xi_{\nu_2} = 0, \tag{37}$$

$k = 1, \ldots, 3\rho - \varkappa_1 - \varkappa + 1 - r_3$. Здесь $N_{\nu,k},\ K_{\nu,k},\ M_{\nu_3,k},\ T_{\nu_2,k}$ $(\nu = 1, \ldots, \rho,\ k = 1, \ldots, 3\rho - \varkappa_1 - \varkappa + 1 - r_3,\ \nu_3 = 1, \ldots, -\varkappa_1 + 1,\ \nu_2 = = 1, \ldots, \rho - \varkappa)$ – полная система линейно независимых решений соответствующей однородной транспонированной системы. При выполнении этих условий общее решение неоднородной задачи Маркушевича содержит $\rho - \varkappa_1 - r_3$ произвольных комплексных постоянных. Если $r_3 = \rho - \varkappa_1$, то задача имеет единственное решение.

Следовательно, справедлива

Теорема 1. *Пусть коэффициенты $a(t), b(t)$ и свободный член $f(t)$ неоднородной задачи Маркушевича являются гельдеровскими на L_0 функциями, $a(t) \ne 0,\ 1 + b_1(t) \ne 0,\ t \in L_0$, функция $b_1(t) + 1$ является краевым значением функции, автоморфной относительно фуксовой группы второго рода Γ в области D_-, и отличной от нуля в этой области, за исключением быть может бесконечно удаленной точки и точек, конгруэнтных ей.*

Тогда неоднородная задача в классе автоморфных функций относительно группы Γ*:*

1) *при* $\varkappa > \rho$, $\varkappa_1 > 0$, *если выполняются* $2\rho + \varkappa_1 - r$ *комплексных условий (34), имеет общее решение, определяемое формулой (33), которое содержит* $2\varkappa + 2\varkappa_1 - 2r$ *произвольных вещественных постоянных, где* r *– ранг матрицы коэффициентов объединенной неоднородной системы линейных уравнений (24), (26), (31) (при* $r = \varkappa + \varkappa_1$ *имеет единственное решение);*

2) *при* $\varkappa \leq \rho$, $\varkappa_1 > 0$, *если выполняются* $3\rho + \varkappa_1 - \varkappa - r_1$ *комплексных условий (35), имеет общее решение, определяемое формулой (33), которое содержит* $2\rho + 2\varkappa_1 - 2r_1$ *произвольных вещественных постоянных , где* r_1 *– ранг матрицы коэффициентов объединенной неоднородной системы линейных уравнений (24), (26), (31), (32) (при* $r_1 = \rho + \varkappa_1$ *имеет единственное решение);*

3) *при* $\varkappa > \rho$, $\varkappa_1 \leq 0$, *если выполняются* $2\rho - \varkappa_1 + 1 - r_2$ *комплексных условий (36) имеет общее решение, определяемое формулой (33), которое содержит* $2\varkappa - 2\varkappa_1 - 2r_2$ *произвольных вещественных постоянных, где* r_2 *– ранг матрицы коэффициентов объединенной неоднородной системы линейных уравнений (27), (26), (23) (при* $r_2 = \varkappa - \varkappa_1$ *имеет единственное решение);*

4) *при* $\varkappa \leq \rho$, $\varkappa_1 \leq 0$, *если выполняются* $3\rho - \varkappa_1 - \varkappa + 1 - r_3$ *комплексных условий (37), имеет общее решение, определяемое формулой (33), которое содержит* $2\rho - 2\varkappa_1 - 2r_3$ *произвольных вещественных постоянных, где* r_3 *– ранг матрицы коэффициентов объединенной неоднородной системы линейных уравнений (27), (26), (23), (32) (при* $r_3 = \rho - \varkappa_1$ *имеет единственное решение).*

Литература

1. Векуа, И.Н. Обобщенные аналитические функции / И.Н. Векуа. – М.: Физматгиз, 1959. – 560 с.

2. Форд, Р. Автоморфные функции / Р. Форд. – М.; Л.: ОНТИ, 1936. – 340 с.

3. Патрушев, А.А. Алгоритм точного решения четырехэлементной задачи линейного сопряжения с рациональными коэффициентами и его программная реализация / А.А. Патрушев, В.М. Адуков // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2010.– № 35 (211), вып. 6. – С. 4–12.

4. Патрушев, А.А. Четырехэлементная задача Маркушевича на единичной окружности /А.А.Патрушев // Известия Смоленского государственного университета. – 2010. – №4. – С. 82–97.

5. Патрушев, А.А. О явном и точном решении трехэлементной задачи Маркушевича / А.А. Патрушев, В.М. Адуков // Известия Саратовского государственного университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2011.– Т. 11, вып. 2. – С. 9–20.

6. Патрушев, А.А. Задача Маркушевича в классе автоморфных функциий в случае произвольной окружности / А.А. Патрушев // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Физика. Химия. – 2011.– №10 (227), вып. 4. – С. 29–37.

7. Сильвестров, В.В. К вопросу об эффективности решения краевой задачи Римана для автоморфных функций / В.В. Сильвестров, Л.И. Чибрикова // Изв. вузов. Математика. – 1978. – №12. – С. 117–121.

8. Зверович, Э.И. Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях / Э.И. Зверович // Успехи мат. наук. – 1971. – Т. 26, вып. 1 (157). – С. 113–179.

9. Чибрикова, Л.И. Краевая задача Римана лля автоморфных функций в случае группы с двумя инвариантами / Л.И. Чибрикова // Изв. вузов. Математика. – 1961. – №6. – С. 121–131.

10. Сильвестров, В.В. Краевая задача Гильберта для одной бесконечной области в классе автоморфных функций / В.В. Сильвестров // Тр. семинара по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. – С. 180–194.

11. Гахов, Ф.Д. Вырожденные случаи особых интегральных уравнений с ядром Коши / Ф.Д. Гахов. // Дифференциальные уравнения. – 1966. – Т. 2, №2. – С. 533–544.

Алексей Алексеевич Патрушев, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Общая математика», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), patraleksej@yandex.ru.

Bulletin of the South Ural State University.
Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»,
2013, vol. 6, no. 2, pp. 49–61.

MSC 30E25

Mathematical Modelling in Piecewise-Uniform Invironment Based on the Solution of the Markushevich Boundary Problem in the Class of Automorphic Functions

A.A. Patrushev, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, patraleksej@yandex.ru

An algorithm for the explicit solution of the Markushevich boundary value problem in the class of automorphic functions with respect of Fuchsian group Γ of the second kind is suggested. The boundary condition of the problem is given on the main circle. The coefficients of the tasks are Holder functions. The alqorithm is based on a reduction of the problem to the Hilbert boundary problem. The solution is found in a closed form under additional restriction on the coefficient $b(t)$ of the problem: if $\chi_+(t), \chi_-(t)$ are factorization multipliers of coefficient $a(t)$, the product of the function $b(t)$ on the quotient of $\overline{\chi_+(t)}$ and $\chi_+(t)$ is analytic in the domain D_- and automorphic with respect to Γ in this the domain.

Keywords: boundary problems for analytic functions, the Markushevich boundary problem, automorphic functions.

References

1. Vekua I.N., *Obobshchyennye analyticheskie funktsii* [Generalized Analytic Functions]. Moscow, Fizmatgiz, 1959. 560 p.

2. Ford R., *Aftomorfnye funktsii* [Automorphic Functions]. Moscow,ONTI, 1936. 340 p.

3. Patrushev A.A., Adukov V.M. Algorithm of Exact Solution of Generalized Four-Element Riemann–Hilbert Boundary Problem with Rational Coefficiets and Its Programm Realization [Algoritm tochnogo resheniya chetyrekhelementnoy zadachi lineynogo sopryazheniya s ratcional'nymi koeffitsientami i ego programmnaya realizatsiya]. *Bulletin of the South Ural State University. Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»*, 2010, no. 35 (211), issue 6, pp. 4–12.
4. Patrushev A.A. The Generalized Hilbert-Riemann Boundery Problem on the Singular Circle [Chetyrekhelementnaya zadacha Markushevicha na elinichnoy okruzhnosti]. *Izvestiya Smolenskogo Gosudarstvennogo Universiteta* [News of Smolensk State University], 2010, no. 4, pp. 82–97.
5. Patrushev A.A., Adukov V.M. On Explicit and Exact Solution of the Markushevich Boundary Problem for Circle [O yavnom i tochnom resheniyakh zadachi Markushevicha na okruzhnosti]. *Izvestiya Saratovskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Novaya Seriya. Seriya: Matematika, Mekhanika, Informatika* [Proceedings of Saratov State University. Series «Mathematics. Mechanics. Informatics»], 2011, vol. 11, no. 2, pp. 9–20.
6. Patrushev A.A. The Markushevich problem in the class of automorphic functions for arbitrary circle [Zadacha Markushevicha v klasse avtomorfnykh funktsiy v sluchae proizvol'noy okruzhnosti]. *Bulletin of the South Ural State University. Series «Mathematics. Physics. Chemistry»*, 2011, no. 10(227), issue 4, pp. 29–37.
7. Silvestrov V.V., Chibrikova L.I. The Issue of Efficiency of Solving the Boundary Value the Tasks of the Riemann for Automorphic Functions [K sluchayu ob effektivnosti resheniya kraevoy zadachi Rimana dlya aftomorfnykh funktsiy]. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1978, no. 12, pp. 117–121.
8. Zverovich E.I. Boundary Value Problems in the Theory of Analytic Functions in Holder Classes on Riemann Surfaces. *Russian Mathematical Surveys*, 1971, vol.26, no. 1, pp. 117–192.
9. Chibrikova L.I. Boundary Value Problem of Riemann for Automorphic Functions in the the Case of Groups with Two Invariants [Kraevaea zadacha Rimana dlya avtomorfnykh funktsiy v sluchae grupp s dvumya invariantami]. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1961, no. 6, pp. 121–131.
10. Silvestrov V.V. Boundary Value Problem of Hilbert's for One Infinite the Field in the Class of Automorphic Functions [Kraevaya zadacha Gilberta dlya odnoy beskonechnoy oblasti v klasse avtomorfnykh funktsiy]. *Trudy Seminara po Kraevym Zadacham* [Proceedings of the Seminar on Boundary Value Problems]. Kazan', Publisher Kazan Gos. Univ., 1980, pp. 180–194.
11. Gaknov, F.D. Degenerate Cases of Singular Integral Equations with Cauchy's Kernel [Vyrozhdennye cluchai osobykh integral'nykh uravneniy c yadrom Koshi]. *Differentsial'nye Uravneniya* [Differential Equations], 1966, vol. 2, no. 2. pp. 533–544.

Поступила в редакцию 16 ноября 2012 г.