УДК 519.6

ОБ ОДНОМ НЕСТАЦИОНАРНОМ ВАРИАНТЕ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КУРЬЕРА С ВНУТРЕННИМИ РАБОТАМИ

А.Г. Ченцов, П.А. Ченцов

Рассматривается задача последовательного обхода мегаполисов с условиями предшествования и выполнением работ в пределах данных мегаполисов. Предполагается, что стоимости перемещений зависят от параметра, который имеет смысл дискретного времени; упомянутая зависимость может отражать приоритеты клиентов, связанных с обслуживаемыми мегаполисами и частично компенсирующих затраты исполнителей. Построенный метод решения объективно отвечает широко понимаемому динамическому программированию, применяемому для решения задачи маршрутизации с ограничениями. Предложено расширение исходной задачи, использующее эквивалентное преобразование системы ограничений, в результате чего допустимость (маршрутов) по предшествованию заменяется допустимостью «по вычеркиванию» (заданий из списка). Тем самым ограничения на маршрут в целом сводятся к системе ограничений на текущие перемещения, что позволяет получить уравнение Беллмана. Для использования последнего в вычислительной процедуре построения слоев функции Беллмана используется подход, в рамках которого предусматривается построение всего массива значений упомянутой функции; данный подход базируется на использовании только существенных (по предшествованию) списков заданий, чем достигается экономия вычислений.

Приложения развиваемой теории могут быть связаны с задачами, касающимися снижения облучаемости персонала атомных электростанций при работах в условиях аварийных ситуаций, а также с задачами транспортного обслуживания большого числа клиентов при наличии условий приоритетности, влияющих на выбор очередности обслуживания.

Ключевые слова: маршрут, условия предшествования, динамическое программирование.

Введение

Настоящая работа продолжает исследования [1–4] в постановке, включающей особенность, подобную отмеченной в [5] (нестационарность в задании функций стоимости). Исследуется задача маршрутизации перемещений, связанных с посещением мегаполисов (непустых конечных множеств) и выполнением в пределах этих мегаполисов работ, именуемых далее внутренними. Предполагается, что некоторый исполнитель покидает начальный пункт (базу), перемещается к первому мегаполису с целью выполнения (в его пределах) некоторых работ, после чего покидает его и перемещается ко второму мегаполису, где также выполняет работы; далее процесс повторяется. Надо выбрать очередность посещения мегаполисов и конкретный вариант реализации упомянутого посещения (следует указать пункты или «города» прибытия и отправления). Рассматриваемой в дальнейшем постановке могут отвечать различные содержательные задачи (в этой связи см. заключение статьи). Отметим сейчас только одну. Речь идет о посещении исполнителем системы производственных помещений, в которых имеются рабочие места, подлежащие обслуживанию с соблюдением ограничений технологического характера; в простейшем случае это может быть одно рабочее место, где требуется выполнить некоторую операцию. Можно допустить, что в пределах помещений исполнитель сталкивается с повышенным уровнем воздействия вредных факторов (например, радиации). Эти воздействия, включая внешний фон, суммируются. Возникает задача о том как выбрать очередность посещения производственных помещений, а также конкретную траекторию перемещений, включающую «внешние» фрагменты и участки, связанные с пребыванием в самих помещениях. Упомянутые участки определяются набором входов и выходов для каждого посещаемого помещения. Именно на этих участках происходит выполнение внутренних работ. В силу упомянутых причин можно принять, что система входов-выходов для каждого помещения рассматривается как мегаполис, а сами входы-выходы – как «города», через которые осуществляется вход для выполнения (внутренних) работ и последующий выход. В рамках естественной, для задачи с аддитивным вариантом агрегирования затрат, иерархической схемы можно без потери качества полагать, что упомянутые работы выполняются всякий раз оптимально, а их влияние на процесс проявляется, в частности, в том, что пункт прибытия на соответствующий мегаполис и пункт отправления могут не совпадать, что и отвечает выполняемой работе. Исследуемая ниже постановка допускает использование ограничений в виде условий предшествования.

Можно указать и другие прикладные задачи, приводящие к постановке настоящей работы. Так, в частности, можно рассматривать вопрос о последовательном выделении транспортных средств для осуществления перевозок в пределах указанных заранее территорий; при этом заданы или оптимизируются пункты посещения, рассматриваемые как «города». Можно полагать, что «города» объединены в совокупности – мегаполисы, в пределах которых действуют однородные в финансовом отношении условия, определяемые тем или иным заказчиком (клиентом) и отражающиеся в стоимости работ в интересах последнего. Исполнителю приходится считаться с претензиями клиентов. Это может, в частности, проявляться в следующем.

Индексы, соответствующие очередности посещения мегаполисов, интерпретируются как моменты времени в системе внешних перемещений, эти моменты могут в большей или меньшей степени отвечать интересам лиц (клиентов), заинтересованных в выполнении работ в пределах соответствующих мегаполисов. Если момент посещения мегаполиса исполнителем является «подходящим» для упомянутого лица – клиента, то он может компенсировать часть затрат исполнителя; в противном случае он может этого не делать и, более того, налагать тот или иной «штраф», что невыгодно исполнителю. Простейший вариант интересов такого рода: все клиенты заинтересованы в скорейшем обслуживании, что в полной мере невозможно как в связи с наличием большого числа мегаполисов, так и в связи с объективными ограничениями директивного характера. Возникает естественный вопрос: как упорядочить процесс посещения мегаполисов с целью минимизации совокупных затрат, используя в том числе компенсации, выделяемые «удовлетворенными» клиентами, и минимизируя «штрафы» за невыгодное (для клиентов) обслуживание.

Во всех вышеупомянутых случаях речь идет о перемещениях в заданном множестве X с системой конечных подмножеств $M_1, ..., M_N$. Фиксируется база (начальная точка) x^0, из которой стартует исполнитель, обязанный посетить все множества (мегаполисы) M_j и выполнить в пределах каждого из них соответствующие работы. Он обязан соблюдать при этом ограничения в части посещения мегаполисов, имеющие смысл «одно после другого» (условия предшествования). Стоимости перемещений и внутренних работ, зависящие от номера в очереди, суммируются. В процессе решения следует прооптимизировать совокупный маршрут (с фрагментами внешних перемещений и внутренних работ) по вышеупомянутому аддитивному критерию.

Итак, рассматриваемая ниже постановка может отвечать различным содержательным задачам (см. в этой связи простейшую «инфляционную» модель в ([5], с. 95, 96). Поэтому представляется важным выяснить некоторые общие свойства решений. В частности, имеет смысл обсудить теоретические положения, связанные с применением широко понимаемого динамического программирования, рассматривая последнее как некую общую основу конструкций последовательной оптимизации в условиях ограничений. Отметим, что конструируемый ниже вариант метода динамического программирования обладает рядом особенностей. Так, в частности, здесь, как и в [1–4], не предусматривается построение всего массива значений функции Беллмана. Вторая важная особенность, также имеющая отношение к экономии вычислений, связана (как и в [5]) с тем, что в «состав» позиций, для которых вычисляются значения упомянутой функции, не включается временной (по смыслу) параметр, а каждая из используемых далее позиций остается, как и в [1–4], упорядоченной парой. Первый элемент этой пары является текущим состоянием процесса, а второй – списком заданий. Позиции остаются при этом достаточно «простыми» и подобными (в новых условиях) используемым в [1–4]. Тем самым исключается «разрастание» пространства позиций как в качественном, так и в количественном отношении, что важно с точки зрения последующего построения и хранения массива значений функции Беллмана.

Работа имеет следующую структуру: после введения общих обозначений (включая, по ряду причин, и некоторые традиционные) приведена постановка задачи, предваряемая серией замечаний содержательного характера; затем конструируется расширение основной задачи и отвечающий ему вариант динамического программирования, включая его «экономичную» версию (рекуррентное построение слоев частичного массива значений функции Беллмана); наконец, осуществляется построение оптимального решения в виде соответствующей пары маршрут-трасса и излагаются результаты вычислительного эксперимента с использованием ПЭВМ.

1. Обозначения общего характера

В дальнейшем используем сокращения: ОЗМ – основная задача маршрутизации, п/м – подмножество, УП – упорядоченная пара. Для сокращенной записи словесных высказываний используем кванторы и пропозициональные связки; через $\stackrel{\triangle}{=}$ обозначаем равенство по определению, $\emptyset$ – пустое множество. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Если x и y – какие-либо объекты, то через $\{x; y\}$ обозначаем множество, содержащее x, y и не содержащее никаких других элементов. Для каждого объекта z в виде $\{z\} \stackrel{\triangle}{=} \{z;\, z\}$ имеем одноэлементное множество, содержащее z. Каждое множество является объектом, а тогда для любых двух множеств A, B определено непустое семейство $\{A;\, B\}$. С учетом этого определяется ([6], с. 67) УП: если x и y – объекты, то $(x, y) \stackrel{\triangle}{=} \big\{\{x\};\, \{x;\, y\}\big\}$ есть УП с первым элементом x и вторым элементом y. Если $\tilde{z}$ – какая-либо УП, то через $\mathrm{pr}_1(\tilde{z})$ и $\mathrm{pr}_2(\tilde{z})$ обозначаем соответственно первый и второй элементы $\tilde{z}$, которые (как объекты) однозначно определяются условием $\tilde{z} = \big(\mathrm{pr}_1(\tilde{z}),\, \mathrm{pr}_2(\tilde{z})\big)$. Данное соглашение существенно, в частности, при указании стоимостей внутренних работ. Как обычно, полагаем для любых трех объектов x, y и z, что $(x,\, y,\, z) \stackrel{\triangle}{=} \big((x, y), z\big)$, получая триплет с первым элементом x, вторым элементом y и третьим элементом z.

Через $\mathcal{P}(S)$ (через $\mathcal{P}'(S)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м произвольного множества S; кроме того, в этом случае $\mathrm{Fin}(S)$ есть по определению семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(S)$. Если A и B – множества, h – отображение из A в B (т. е. $h : A \to B$) и $C \in \mathcal{P}'(A)$, то через $(h|C)$ обозначаем сужение h на C; $(h|C)(x) \stackrel{\triangle}{=} h(x) \ \ \forall x \in C$. Напомним о традиционных правилах экономии скобок для функций нескольких переменных. Так, для всяких множеств A, B и C, отображения $g : A \times B \to C$, точек $a \in A$ и $b \in B$ полагаем $g(a, b) \stackrel{\triangle}{=} g(u)$, где $u = (a, b)$ (при этом, конечно, $a = \mathrm{pr}_1(u)$ и $b = \mathrm{pr}_2(u)$). Аналогичным образом, для произвольных множеств A, B, C и D, отображения $s : A \times B \times C \to D$, а также точек $a \in A$, $b \in B$ и $c \in C$ полагаем $s(a, b, c) \stackrel{\triangle}{=} s(v)$, где $v = (a, b, c)$.

В дальнейшем $\mathbb{R}$ – вещественная прямая, $[0,\infty[\ \stackrel{\triangle}{=} \{\xi \in \mathbb{R} | \, 0 \leqslant \xi\}$, $\mathbb{N} \stackrel{\triangle}{=} \{1;2;\ldots\}$, $\mathbb{N}_o \stackrel{\triangle}{=} \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0;1;2;\ldots\}$, $\overline{k,l} \stackrel{\triangle}{=} \{i \in \mathbb{N}_o \mid \ (k \leqslant i) \,\&\, (i \leqslant l)\}\ \forall k \in \mathbb{N}_o\ \forall l \in \mathbb{N}_o$ (допускается реализация пустого множества). Для произвольного множества S через $\mathcal{R}_+[S]$ обозначаем множество всех вещественнозначных неотрицательных функций на S. Если K – непустое конечное множество, то через $|K|$ обозначаем мощность (количество элементов) K, $|K| \in \mathbb{N}$; полагаем также $|\emptyset| \stackrel{\triangle}{=} 0$. С данным определением естественно связывается понятие биекции «отрезка» $\mathbb{N}$ на непустое конечное множество: если K – непустое конечное множество, то через $(\mathrm{bi})[K]$ обозначаем множество всех биекций ([7], с. 86) «отрезка» $\overline{1,|K|}$ на K; $(\mathrm{bi})[K] \neq \emptyset$. Перестановкой произвольного непустого множества A называется ([7], с. 87) всякая биекция множества A на себя.

2. Постановка задачи

Всюду в дальнейшем фиксируем число $N \in \mathbb{N}$ со свойством $2 \leqslant N$, непустое множество X, точку $x^o \in X$, именуемую базой, а также кортеж

$$(M_i)_{i \in \overline{1,N}} : \overline{1,N} \longrightarrow \mathrm{Fin}(X) \tag{2.1}$$

целевых множеств, именуемых далее мегаполисами. Итак, $M_1, ..., M_N$ – суть мегаполисы. В связи с (2.1) полагаем далее, что

$$(x^o \notin M_j \ \ \forall j \in \overline{1,N}) \,\&\, (M_p \cap M_q = \emptyset \ \ \forall p \in \overline{1,N} \ \ \forall q \in \overline{1,N} \setminus \{p\}). \tag{2.2}$$

Фиксируем в дальнейшем множество $\mathbf{K} \in \mathcal{P}(\overline{1,N} \times \overline{1,N})$ ($\mathbf{K}$ – п/м «квадрата» $\overline{1,N} \times \overline{1,N}$; случай $\mathbf{K} = \emptyset$ не исключается); элементы $\mathbf{K}$ (а это – УП) именуем адресными парами. При $z \in \mathbf{K}$ рассматриваем $\mathbf{i} = \mathrm{pr}_1(z) \in \overline{1,N}$ как отправителя, а $\mathbf{j} = \mathrm{pr}_2(z) \in \overline{1,N}$ - как получателя (сообщения, груза), что по смыслу предполагает посещение мегаполиса $M_{\mathbf{i}}$ раньше, чем посещение $M_{\mathbf{j}}$. Итак, $N, X, x^o, M_1, \ldots, M_N, \mathbf{K}$ – суть параметры задачи. Полезно ввести также множество

$$\mathbf{X} \stackrel{\triangle}{=} \{x^o\} \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{N} M_i\Big) \tag{2.3}$$

с тем, чтобы в последующих построениях заменить X на $\mathbf{X} \in \mathrm{Fin}(X)$. В виде (2.3) получаем фазовое пространство рассматриваемого процесса. Через $\mathbb{P}$ обозначаем множество всех перестановок «отрезка» $\overline{1,N}$: $\mathbb{P} \stackrel{\triangle}{=} (\mathrm{bi})[\overline{1,N}]$. Если $\alpha \in \mathbb{P}$, то через α^{-1} обозначаем перестановку из $\mathbb{P}$, обратную к α : $\alpha^{-1} \in \mathbb{P}$ и $\alpha^{-1}\big(\alpha(k)\big) = \alpha\big(\alpha^{-1}(k)\big) = k \ \ \forall k \in \overline{1,N}$. Перестановки из $\mathbb{P}$ именуем далее маршрутами. В терминах $\mathbf{K}$ определяется множество

$$\mathbb{A} \stackrel{\triangle}{=} \{\alpha \in \mathbb{P} | \, \alpha^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(z)\big) < \alpha^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(z)\big) \ \ \forall z \in \mathbf{K}\}; \tag{2.4}$$

в виде (2.4) имеем ([4], с. 22) множество всех маршрутов из $\mathbb{P}$, допустимых по предшествованию: $\mathbb{A}$ есть (в точности) множество всех маршрутов, каждый из которых для всякой адресной пары осуществляет посещение отправителя раньше, чем посещение соответствующего получателя. Всюду в дальнейшем полагаем выполненным

Условие 3.1. $\forall \mathbf{K}_o \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}) \ \ \exists z_o \in \mathbf{K}_o : \mathrm{pr}_1(z_o) \neq \mathrm{pr}_2(z) \ \ \forall z \in \mathbf{K}_o$.

В ([4], часть 2) показано, что (при условии 3.1) $\mathbb{A} \neq \emptyset$; см. ([4], (2.2.53)). Мы рассматриваем ниже задачу о построении перемещений вида

$$x^o \to (z_1 \in M_{\alpha(1)} \times M_{\alpha(1)}) \to \ldots \to (z_N \in M_{\alpha(N)} \times M_{\alpha(N)}), \tag{2.5}$$

где $\alpha \in \mathbb{A}$ и УП $z_1, \ldots, z_N$ могут выбираться произвольно. Содержательный смысл (2.5) состоит в следующем: исполнитель, следуя очередности, устанавливаемой маршрутом α, перемещается с базы x^0 в пункт прибытия $x_1^{(1)} = \mathrm{pr}_1(z_1) \in M_{\alpha(1)}$, выполняет работы, связанные с $M_{\alpha(1)}$ и завершаемые в пункте $x_2^{(1)} = \mathrm{pr}_2(z_1) \in M_{\alpha(1)}$, после чего перемещается в пункт прибытия $x_1^{(2)} = \mathrm{pr}_1(z_2) \in M_{\alpha(2)}$ мегаполиса $M_{\alpha(2)}$, выполняет соответствующие работы, завершая их в пункте $x_2^{(2)} = \mathrm{pr}_2(z_2) \in M_{\alpha(2)}$; дальнейшие перемещения аналогичны. Задача организации перемещений вида (2.5) рассматривалась в [1, 2, 3] и в ряде других работ. Особенностью является специфический характер функций стоимости внешних перемещений в (2.5) и соответствующих (внутренних) работ.

Функции стоимости. Мы полагаем далее, что внешние перемещения в (2.5) характеризуются стоимостями, зависящими от индекса мегаполиса, на который осуществляется перемещение, и «момента времени» (два упомянутых обстоятельства на деле взаимосвязаны): заданы функции (на деле – «объемные» матрицы)

$$\mathbf{c}_1 \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times M_1 \times \overline{1, N}], \ldots, \mathbf{c}_N \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times M_N \times \overline{1, N}]. \tag{2.6}$$

В связи с (2.6) заметим, что при $j \in \overline{1, N}$, $x \in \mathbf{X}$, $y \in M_j$ и $t \in \overline{1, N}$ значение $\mathbf{c}_j(x, y, t) \in [0, \infty[$ характеризует стоимость перемещения из x в точку y, завершаемого в «момент времени» t. Индекс j, используемый в реализации соответствующей функции из (2.6), учитывает возможную заинтересованность или, напротив, незаинтересованность клиента, ответственного за обслуживание M_j, в осуществлении такого перемещения именно в «момент» t.

Замечание 1. В принципе система (2.6) может быть сведена к одной функции

$$\tilde{\mathbf{c}} : \mathbf{X} \times \Big(\bigcup_{i=1}^{N} M_i\Big) \times \overline{1, N} \longrightarrow [0, \infty[,$$

которая с учетом (2.2) получается склеиванием $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_N$. Дело в том, что по каждому элементу $y \in \bigcup\limits_{i=1}^{N} M_i$ определяется единственный индекс $\mathbf{j}[y] \in \overline{1, N}$, для которого $y \in M_{\mathbf{j}[y]}$. Тогда (при $x \in \mathbf{X}$ и $t \in \overline{1, N}$) можно полагать $\tilde{\mathbf{c}}(x, y, t) \overset{\triangle}{=} \mathbf{c}_{\mathbf{j}[y]}(x, y, t)$.

Возвращаясь к (2.5), введем в рассмотрение функции («объемные» матрицы)

$$c_1 \in \mathcal{R}_+[M_1 \times M_1 \times \overline{1, N}], \ldots, c_N \in \mathcal{R}_+[M_N \times M_N \times \overline{1, N}]. \tag{2.7}$$

Замечание 2. При $j \in \overline{1, N}$, $x \in M_j$, $y \in M_j$ и $t \in \overline{1, N}$ величина $c_j(x, y, t)$ характеризует стоимость работ, выполняемых исполнителем в пределах мегаполиса M_j в «момент» t при условии, что x есть пункт прибытия в мегаполис M_j, а y есть соответствующий пункт отправления. Упомянутый набор параметров j, x, y, t может, вообще говоря, и не определять однозначно вариант выполнения соответствующих внутренних работ, их можно осуществлять лучше или хуже в смысле реальной стоимости. Однако мы ориентируемся на вариант, являющийся наилучшим, имея в виду соображения минимизации совокупного аддитивного критерия. Поэтому $c_j(x, y, t)$ определяем как экстремум внутренних работ в пределах M_j в условиях, когда выполнение этих работ начинается в точке x (пункт прибытия), а заканчивается в точке y. Так, например, если внутренние работы состоят в посещении всех «городов» мегаполиса (имеются в виду точки M_j) с началом в x и завершением в y, то $c_j(x, y, t)$ есть минимум суммы стоимостей перемещений между городами вдоль того или иного (внутреннего) маршрута; эти стоимости могут зависеть от t. Заметим, что определение значений $c_j(x, y, t)$ можно отнести к решению задач нижнего уровня иерархической схемы, после чего эти значения передаются на верхний уровень для решения (основной) макрозадачи. В результате такого решения будет найден оптимальный вариант построения перемещений в (2.5) и, в частности, будут конкретизированы соответствующие этому варианту значения параметров x, y, t при посещении M_j : будут реализованы маршрут $\alpha^o \in \mathbb{A}$ и узлы трассы $z_1^o, \ldots, z_N^o$, после чего нужная версия x, y и t будет представлена в виде

$$x = \mathrm{pr}_1(z_\tau^o),\ y = \mathrm{pr}_2(z_\tau^o),\ t = \tau \tag{2.8}$$

при $j = \alpha^o(\tau)$. После этого можно конкретизировать вариант выполнения внутренних работ, используя оптимальное решение «внутренней» задачи в условиях (2.8). Тем самым реализуются «связки» компонент УП $z_1^o, \ldots, z_N^o$, и формируется совокупный процесс, включающий внешние перемещения вида (2.5) и фрагменты внутренних работ, осуществляемых оптимально при фиксации УП $z_1^o \in M_{\alpha^o(1)} \times M_{\alpha^o(1)}, \ldots, z_N^o \in M_{\alpha^o(N)} \times M_{\alpha^o(N)}$. В теоретических построениях настоящей работы мы занимаемся решением задачи верхнего уровня, считая, что решение задач нижнего уровня затруднений не составляет (в случае, когда внутренние работы сводятся к решению задачи коммивояжера, это соответствует случаю, когда число «городов» в мегаполисах невелико).

Всюду в дальнейшем фиксируем $f \in \mathcal{R}_+\big[\bigcup\limits_{i=1}^{N} M_i\big]$. Функция f оценивает финальное состояние в (2.5): в качестве соответствующей оценки используется значение $f(\mathrm{pr}_2(z_N))$. Таким образом можно, в частности, оценить, если это требуется, перемещение из пункта $\mathrm{pr}_2(z_N)$ на базу, что типично для задачи коммивояжера. Возвращаясь к (2.5), введем трассы (траектории), согласованные с наперед выбранным маршрутом. Условимся в этой связи через $\mathbf{Z}$ обозначать множество всех кортежей

$$(z_i)_{i \in \overline{0,N}} : \overline{0,N} \longrightarrow \mathbf{X} \times \mathbf{X}. \tag{2.9}$$

Определяем трассы в виде кортежей (2.9). Пусть (в соответствии с (2.5))

$$\mathcal{Z}_\alpha \stackrel{\triangle}{=} \big\{(z_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathbf{Z} \,|\, \big(z_o = (x^o, x^o)\big) \,\&\, \big(z_j \in M_{\alpha(j)} \times M_{\alpha(j)} \quad \forall j \in \overline{1,N}\big)\big\} \quad \forall \alpha \in \mathbb{P}. \tag{2.10}$$

Итак, определены всевозможные трассы перемещений, согласованные с выбранным маршрутом. Разумеется, $\mathcal{Z}_\alpha \in \mathrm{Fin}(\mathbf{Z}) \ \ \forall \alpha \in \mathbb{P}$. Если $\alpha \in \mathbb{A}$ и $(z_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha$, то

$$\Pi\big(\alpha, (z_i)_{i \in \overline{0,N}}\big) \stackrel{\triangle}{=} \sum_{t=1}^{N} \mathbf{c}_{\alpha(t)}\big(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), t\big) + \sum_{t=1}^{N} c_{\alpha(t)}(z_t, t) + f\big(\mathrm{pr}_2(z_N)\big). \tag{2.11}$$

В терминах (2.11) определен, в частности (см. (2.10)), аддитивный критерий. Основная задача маршрутизации (ОЗМ), исследуемая в дальнейшем, имеет вид

$$\Pi\big(\alpha, (z_i)_{i \in \overline{0,N}}\big) \longrightarrow \min, \quad \alpha \in \mathbb{A}, (z_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha. \tag{2.12}$$

Ограничения ОЗМ (2.12) совместны; данной задаче соответствует значение (глобальный экстремум)

$$V \stackrel{\triangle}{=} \min_{\alpha \in \mathbb{A}} \ \min_{(z_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha} \ \Pi\big(\alpha, (z_i)_{i \in \overline{0,N}}\big) \in [0, \infty[\tag{2.13}$$

и непустое множество оптимальных решений, являющихся каждое УП маршрут-трасса; при этом пару $\big(\alpha^o, (z_i^o)_{i \in \overline{0,N}}\big) \in \mathbb{A} \times \mathbf{Z}$, для которой $(z_i^o)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_{\alpha^o}$, называем оптимальной, если $\Pi\big(\alpha^o, (z_i^o)_{i \in \overline{0,N}}\big) = V$. Наша цель будет состоять в нахождении V (2.13) и какой-либо оптимальной пары маршрут-трасса.

3. Расширение основной задачи

Следуя логике построений в [1–4], рассмотрим естественное преобразование системы ограничений, заменяя допустимость маршрутов по предшествованию допустимостью «по вычеркиванию». Данное преобразование не изменяет «запас» допустимых маршрутов и приводит к более удобной системе (укороченных) задач, образующих расширение ОЗМ; в его терминах будет введена функция Беллмана. Пусть $\mathfrak{N} \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{P}'(\overline{1,N})$ и $\mathbf{N} \stackrel{\triangle}{=} \mathfrak{N} \cup \{\emptyset\}$ (тогда $\mathbf{N} = \mathcal{P}(\overline{1,N})$). Следуя ([4], часть 2), полагаем

$$\Xi[K] \stackrel{\triangle}{=} \{z \in \mathbf{K} | \big(\mathrm{pr}_1(z) \in K\big) \,\&\, \big(\mathrm{pr}_2(z) \in K\big)\} \quad \forall K \in \mathfrak{N}. \tag{3.1}$$

Тогда оператор вычеркивания $\mathbf{I} : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ определяется [4] следующим правилом:

$$\mathbf{I}(K) \stackrel{\triangle}{=} K \setminus \{\mathrm{pr}_2(z) : \, z \in \Xi[K]\} \quad \forall K \in \mathfrak{N}, \tag{3.2}$$

(учитываем условие 3.1). В терминах оператора $\mathbf{I}$ введем допустимость «по вычеркиванию»; новый тип допустимости применяем к маршрутам частичным, а именно ([4], часть 2):

$$\begin{gathered}(\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K] \stackrel{\triangle}{=} \big\{\alpha \in (\mathrm{bi})[K] | \, \alpha(m) \in \mathbf{I}\big(\{\alpha(i) : \, i \in \overline{m, |K|}\}\big) \\ \forall m \in \overline{1, |K|}\big\} \in \mathcal{P}'\big((\mathrm{bi})[K]\big) \quad \forall K \in \mathfrak{N}.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Свойства (3.3) дополняются ([4], часть 2) положением «стыковочного» характера

$$\mathbb{A} = (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[\overline{1,N}]. \tag{3.4}$$

В связи с (3.3), (3.4) полезно ввести также частичные трассы; для этого сначала введем при $K \in \mathfrak{N}$ множество $\mathbb{Z}_K$ всех кортежей $(z_i)_{i \in \overline{0,|K|}} : \overline{0,|K|} \longrightarrow \mathbf{X} \times \mathbf{X}$. Нужное определение множества трасс, согласованных с (частичным) маршрутом, имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}\mathcal{Z}(x, K, \alpha) \stackrel{\triangle}{=} \{(z_i)_{i \in \overline{0,|K|}} \in \mathbb{Z}_K | \big(z_o = (x, x)\big) \& \big(z_j \in M_{\alpha(j)} \times M_{\alpha(j)} \ \forall j \in \overline{1, |K|}\big)\} \in \mathrm{Fin}(\mathbb{Z}_K) \\ \forall x \in \mathbf{X} \ \ \forall K \in \mathfrak{N} \ \ \forall \alpha \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K].\end{gathered} \tag{3.5}$$

Поскольку $|\overline{1,N}| = N$ и $\mathbb{Z}_{\overline{1,N}} = \mathbf{Z}$, то получаем еще одно представление «стыковочного» характера (см. (2.10), (3.4), (3.5)):

$$\mathcal{Z}_\alpha = \mathcal{Z}(x^o, \overline{1,N}, \alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{A}. \tag{3.6}$$

В связи с (3.5) введем укороченные (вообще говоря) варианты аддитивного критерия:

$$\begin{gathered}\pi[x; K; \alpha; (z_i)_{i \in \overline{0,|K|}}] \stackrel{\triangle}{=} \sum_{t=1}^{|K|} \mathbf{c}_{\alpha(t)}\big(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), N - |K| + t\big) + \sum_{t=1}^{|K|} c_{\alpha(t)}(z_t, N - |K| + t) + \\ + f\big(\mathrm{pr}_2(z_{|K|})\big) \quad \forall x \in \mathbf{X} \ \ \forall K \in \mathfrak{N} \ \ \forall \alpha \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K] \ \ \forall (z_i)_{i \in \overline{0,|K|}} \in \mathcal{Z}(x, K, \alpha).\end{gathered} \tag{3.7}$$

С учетом (3.3), (3.5) и (3.7) оказывается корректным следующее определение:

$$v(x, K) \stackrel{\triangle}{=} \min_{\alpha \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K]} \ \min_{(z_i)_{i \in \overline{0,|K|}} \in \mathcal{Z}(x, K, \alpha)} \pi[x; K; \alpha; (z_i)_{i \in \overline{0,|K|}}] \quad \forall x \in \mathbf{X} \ \ \forall K \in \mathfrak{N} \,. \tag{3.8}$$

Согласно (3.4), (3.6) и (3.7) определено значение $\pi[x^o; \overline{1,N}; \alpha; (z_i)_{i \in \overline{0,N}}]$ при $\alpha \in \mathbb{A}$ и $(z_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha$; имеем из (2.11) и (3.7), что (см. (3.4), (3.6)) $\Pi\big(\alpha, (z_i)_{i \in \overline{0,N}}\big) = \pi[x^o; \overline{1,N}; \alpha; (z_i)_{i \in \overline{0,N}}]$. Из (3.8) следует, что $v(x^o, \overline{1,N}) \in [0, \infty[$ и, более того, согласно (2.13) и (3.8)

$$v(x^o, \overline{1,N}) = V. \tag{3.9}$$

В (3.9) имеем «стыковку» ОЗМ и системы укороченных задач по результату. Сами укороченные задачи связываются с (3.8) и с учетом (3.9) образуют расширение ОЗМ. Располагая значениями (3.8), введем функцию $\mathcal{V}: \mathbf{X} \times \mathbf{N} \longrightarrow [0, \infty[$ по следующему правилу, учитывающему (3.9) и естественное краевое условие:

$$\big(\mathcal{V}(x, K) \triangleq v(x, K) \quad \forall x \in \mathbf{X} \quad \forall K \in \mathfrak{N}\big) \,\&\, \big(\mathcal{V}(x, \emptyset) \triangleq f(x) \quad \forall x \in \mathbf{X}\big). \tag{3.10}$$

Из (3.9) и (3.10) имеем равенство $\mathcal{V}(x^o, \overline{1, N}) = V$. Итак, введена функция Беллмана.

Предложение 1. *Если $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$, то справедливо следующее равенство:*

$$\begin{gathered}\mathcal{V}(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \; \min_{z \in M_j \times M_j} \big[\mathbf{c}_j\big(x, \mathrm{pr}_1(z), N - |K| + 1\big) + c_j(z, N - |K| + 1) + \\ + \mathcal{V}(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})\big].\end{gathered} \tag{3.11}$$

Доказательство. Пусть $n \triangleq |K|$; тогда $n \in \overline{1, N}$, а потому $(n = 1) \vee (n \in \overline{2, N})$. В случае $n = 1$ доказательство очевидно; поэтому ограничимся рассмотрением случая $n \in \overline{2, N}$. При $j \in \mathbf{I}(K)$ имеем тогда

$$K \setminus \{j\} \in \mathfrak{N}: \; |K \setminus \{j\}| = n - 1. \tag{3.12}$$

Обозначим выражение в правой части (3.11) через ω; тогда $\omega \in [0, \infty[$.

С учетом (3.8), (3.10) выберем $\alpha^o \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K]$ и $(z_i^o)_{i \in \overline{0, n}} \in \mathcal{Z}(x, K, \alpha^o)$ так, что

$$\mathcal{V}(x, K) = \pi[x; K; \alpha^o; (z_i^o)_{i \in \overline{0, n}}]. \tag{3.13}$$

В силу сюръективности α^o имеем из (3.3), что $\alpha^o(1) \in \mathbf{I}(K)$ и согласно (3.12)

$$\mathbb{K} \triangleq K \setminus \{\alpha^o(1)\} \in \mathfrak{N}: \; |\mathbb{K}| = n - 1. \tag{3.14}$$

Поскольку $z_1^o \in M_{\alpha^o(1)} \times M_{\alpha^o(1)}$, имеем очевидное неравенство

$$\omega \leqslant \mathbf{c}_{\alpha^o(1)}\big(x, \mathrm{pr}_1(z_1^o), N - n + 1\big) + c_{\alpha^o(1)}(z_1^o, N - n + 1) + \mathcal{V}\big(\mathrm{pr}_2(z_1^o), \mathbb{K}\big). \tag{3.15}$$

Заметим, что $\alpha^o(t + 1) \in \mathbb{K}$ при $t \in \overline{1, n - 1}$. С учетом этого мы введем отображение $\alpha_o: \overline{1, n - 1} \longrightarrow \mathbb{K}$ посредством правила $\alpha_o(t) \triangleq \alpha^o(t + 1) \quad \forall t \in \overline{1, n - 1}$. С учетом (3.3) и (3.14) получаем, что

$$\alpha_o \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[\mathbb{K}], \tag{3.16}$$

причем $z_{j+1}^o \in M_{\alpha_o(j)} \times M_{\alpha_o(j)} \quad \forall j \in \overline{1, n - 1}$. Используя (3.14), введем кортеж $(z_i^{oo})_{i \in \overline{0, n-1}} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ по правилу

$$\Big(z_o^{oo} \triangleq \big(\mathrm{pr}_2(z_1^o), \mathrm{pr}_2(z_1^o)\big)\Big) \,\&\, (z_j^{oo} \triangleq z_{j+1}^o \quad \forall j \in \overline{1, n - 1}). \tag{3.17}$$

Тогда $(z_i^{oo})_{i \in \overline{0, n-1}} \in \mathcal{Z}\big(\mathrm{pr}_2(z_1^o), \mathbb{K}, \alpha_o\big)$, причем справедливо (см. (3.13), (3.17)) следующее равенство

$$\mathcal{V}(x, K) = \mathbf{c}_{\alpha^o(1)}\big(x, \mathrm{pr}_1(z_1^o), N - n + 1\big) + c_{\alpha^o(1)}(z_1^o, N - n + 1) + \pi[\mathrm{pr}_2(z_1^o); \mathbb{K}; \alpha_o; (z_i^{oo})_{i \in \overline{0, n-1}}],$$

где $\mathcal{V}\big(\mathrm{pr}_2(z_1^o), \mathbb{K}\big) \leqslant \pi[\mathrm{pr}_2(z_1^o); \mathbb{K}; \alpha_o; (z_i^{oo})_{i \in \overline{0, n-1}}]$ согласно (3.8), (3.10). В итоге получаем с учетом (3.15) неравенство

$$\omega \leqslant \mathcal{V}(x, K). \tag{3.18}$$

По определению ω имеем для некоторых $q \in \mathbf{I}(K)$ и $\mathbf{y} \in M_q \times M_q$ равенство

$$\mathbf{c}_q\big(x, \mathrm{pr}_1(\mathbf{y}), N - n + 1\big) + c_q(\mathbf{y}, N - n + 1) + \mathcal{V}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}), Q\big) = \omega, \tag{3.19}$$

где $Q \overset{\triangle}{=} K \setminus \{q\} \in \mathfrak{N}$ и $|Q| = n-1$ (см. (3.12)). С учетом (3.8) и (3.10) подберем $\beta_o \in (\mathbf{I}-\mathrm{bi})[Q]$ и $(w_i)_{i\in\overline{0,n-1}} \in \mathcal{Z}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}), Q, \beta_o\big)$ так, что при этом

$$\mathcal{V}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}), Q\big) = \pi[\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}); Q; \beta_o; (w_i)_{i\in\overline{0,n-1}}]. \tag{3.20}$$

Заметим, что $\beta_o(j-1) \in K$ при $j \in \overline{2,n}$. Введем отображение $\beta^o : \overline{1,n} \longrightarrow K$ по правилу $\big(\beta^o(1) \overset{\triangle}{=} q\big)$ & $\big(\beta^o(j) \overset{\triangle}{=} \beta_o(j-1) \ \ \forall j \in \overline{2,n}\big)$. Легко видеть, что

$$\beta^o \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K]. \tag{3.21}$$

Заметим теперь, что (см. (3.5)) $w_{j-1} \in M_{\beta^o(j)} \times M_{\beta^o(j)} \ \ \forall j \in \overline{2,n}$. С учетом этого введем кортеж $(w_i^o)_{i\in\overline{0,n}} \in \mathbb{Z}_K$ по следующему правилу:

$$\big(w_o^o \overset{\triangle}{=} (x,x)\big) \,\&\, (w_1^o \overset{\triangle}{=} \mathbf{y}) \,\&\, (w_j^o \overset{\triangle}{=} w_{j-1} \ \ \forall j \in \overline{2,n}). \tag{3.22}$$

Из (3.5) и (3.22) вытекает очевидное свойство

$$(w_i^o)_{i\in\overline{0,n}} \in \mathcal{Z}(x, K, \beta^o). \tag{3.23}$$

Тогда из (3.8), (3.10), (3.21) и (3.23) получаем неравенство $\mathcal{V}(x,K) \leqslant \pi[x; K; \beta^o; (w_i^o)_{i\in\overline{0,n}}]$, из которого после несложных преобразований извлекается следующая оценка

$$\mathcal{V}(x,K) \leqslant \mathbf{c}_q\big(x, \mathrm{pr}_1(\mathbf{y}), N-n+1\big) + c_q(\mathbf{y}, N-n+1) + \pi[\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}); Q; \beta_o; (w_i)_{i\in\overline{0,n-1}}]. \tag{3.24}$$

В силу (3.20) и (3.24) $\mathcal{V}(x,K) \leqslant \mathbf{c}_q\big(x, \mathrm{pr}_1(\mathbf{y}), N-n+1\big) + c_q(\mathbf{y}, N-n+1) + \mathcal{V}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}), Q\big)$; как следствие (см. (3.19)), $\mathcal{V}(x,K) \leqslant \omega$. С учетом (3.18) получаем равенство $\mathcal{V}(x,K) = \omega$. □

Предложение 1 фактически определяет (см. (3.11)) уравнение Беллмана, которое опосредовано будет использоваться для построения вычислительной процедуры.

4. Слои функции Беллмана

В настоящем разделе напомним вариант «усеченной» версии метода динамического программирования [1–3] с последующей ее конкретизацией в духе (3.11). Отождествляем при этом пространство позиций с множеством $\mathbf{X}\times\mathbf{N}$, что соответствует области определения функции $\mathcal{V}$. Как и в [1–3], используем ниже семейство

$$\mathcal{G} \overset{\triangle}{=} \big\{K \in \mathfrak{N} \,|\, \forall z \in \mathbf{K} \ \ \big(\mathrm{pr}_1(z) \in K\big) \Longrightarrow \big(\mathrm{pr}_2(z) \in K\big)\big\} \tag{4.1}$$

всех существенных по предшествованию списков (заданий). Упомянутые списки (см. (4.1)) ранжируются по мощности:

$$\mathcal{G}_s \overset{\triangle}{=} \{K \in \mathcal{G} \,|\, s = |K|\} \in \mathcal{P}(\mathcal{G}) \ \ \forall s \in \overline{1,N}. \tag{4.2}$$

Проще всего устроены семейства $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_N$: полагая $\mathbf{K}_1 \overset{\triangle}{=} \{\mathrm{pr}_1(z) : \ z \in \mathbf{K}\}$, имеем $\mathcal{G}_1 = \big\{\{k\} : k \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1\big\}$; $\mathcal{G}_N = \{\overline{1,N}\}$ (одноэлементное семейство). Наконец (см. ([4], с. 172)),

$$K \setminus \{k\} \in \mathcal{G}_{s-1} \ \ \forall s \in \overline{2,N} \ \ \forall K \in \mathcal{G}_s \ \ \forall k \in \mathbf{I}(K), \tag{4.3}$$

(на самом же деле $\mathcal{G}_{s-1} = \big\{K \setminus \{j\} : \ K \in \mathcal{G}_s, \ j \in \mathbf{I}(K)\big\}$ при $s \in \overline{2,N}$, но для всех наших целей достаточно (4.3)). Отметим, что $\mathcal{G}_s \neq \emptyset \ \ \forall s \in \overline{1,N}$. Этот факт можно в принципе извлечь из (4.3). Но мы воспользуемся положением ([4], предложение 4.9.2), используя то, что $\mathbb{A} \neq \emptyset$ (см. раздел 3). Пусть $\alpha \in \mathbb{A}$ и $s \in \overline{1, N}$. Тогда для $k_s \triangleq N - s + 1 \in \overline{1, N}$ имеем $s = N - k_s + 1$, а потому ([4], с. 175) $\{\alpha(i) :\ i \in \overline{k_s, N}\} \in \mathcal{G}_s$. Требуемое свойство непустоты множеств $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_N$ установлено. Пусть

$$\mathcal{J}_s(K) \triangleq \big\{j \in \overline{1, N} \setminus K |\, \{j\} \cup K \in \mathcal{G}_{s+1}\big\} \ \ \forall s \in \overline{1, N-1} \ \ \forall K \in \mathcal{G}_s. \tag{4.4}$$

Конструкция на основе (4.1) – (4.4) распространяется в [1] – [4] на пространство позиций: мы конструируем слои $D_o, D_1, \ldots, D_N$. При этом множество

$$\mathbf{M} \triangleq \bigcup_{i \in \overline{1, N} \setminus \mathbf{K}_1} M_i \in \mathrm{Fin}(\mathbf{X})$$

(см. ([4], с. 174, 175)) определяет D_o в виде $D_o \triangleq \mathbf{M} \times \{\emptyset\}$; $D_N \triangleq \{(x^o, \overline{1, N})\}$ (одноэлементное множество). Кроме того, полагаем

$$\mathcal{M}_s[K] \triangleq \bigcup_{i \in \mathcal{J}_s(K)} M_i \ \ \forall s \in \overline{1, N-1} \ \ \forall K \in \mathcal{G}_s. \tag{4.5}$$

Множества (4.5) определяют клетки пространства позиций:

$$\mathbb{D}_s[K] = \{(x, K) :\ x \in \mathcal{M}_s[K]\} \ \ \forall s \in \overline{1, N-1} \ \ \forall K \in \mathcal{G}_s. \tag{4.6}$$

В терминах (4.6) определяем промежуточные слои пространства позиций

$$D_s \triangleq \bigcup_{K \in \mathcal{G}_s} \mathbb{D}_s[K] \in \mathcal{P}'(\mathbf{X} \times \mathcal{G}) \ \ \forall s \in \overline{1, N-1} \tag{4.7}$$

(см. ([4], предложение 4.9.3)). Тогда $(D_s)_{s \in \overline{0, N}} : \overline{0, N} \longrightarrow \mathcal{P}'(\mathbf{X} \times \mathbf{N})$. С учетом этого введем систему сужений функции Беллмана, получая, что

$$\mathcal{V}_s \triangleq (\mathcal{V}|\, D_s) \in \mathcal{R}_+[D_s] \ \ \forall s \in \overline{0, N}. \tag{4.8}$$

Из (4.8) следует, конечно (см. раздел 2), что

$$\mathcal{V}_s(x, K) = \mathcal{V}(x, K) \ \ \forall s \in \overline{0, N} \ \ \forall (x, K) \in D_s. \tag{4.9}$$

При этом согласно (3.10) и (4.9) явным образом определяется $\mathcal{V}_o$:

$$\mathcal{V}_o(x, \emptyset) = f(x) \ \ \forall x \in \mathbf{M}. \tag{4.10}$$

С другой стороны, из определения D_N и (4.9) извлекается равенство

$$\mathcal{V}_N(x^o, \overline{1, N}) = V. \tag{4.11}$$

Переход от $\mathcal{V}_o$ к $\mathcal{V}_N$ определяется рекуррентной процедурой

$$\mathcal{V}_o \longrightarrow \mathcal{V}_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{V}_N, \tag{4.12}$$

которая конструируется ниже на основе известного ([4], предложение 4.9.4) свойства

$$(y, K \setminus \{j\}) \in D_{s-1} \ \ \forall s \in \overline{1, N} \ \ \forall (x, K) \in D_s \ \ \forall j \in \mathbf{I}(K) \ \ \forall y \in M_j. \tag{4.13}$$

Итак, при $s \in \overline{1,N}$ и $(x,K) \in D_s$ определены величины $\mathcal{V}_{s-1}\big(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}\big), j \in \mathbf{I}(K), z \in M_j \times M_j$, что позволяет вычислить значение

$$\min_{j\in\mathbf{I}(K)} \min_{z\in M_j\times M_j} \big[c_j\big(x, \mathrm{pr}_1(z), N-|K|+1\big)+c_j(z, N-|K|+1)+\mathcal{V}_{s-1}\big(\mathrm{pr}_2(z), K\setminus\{j\}\big)\big] \in [0,\infty[.$$

Предложение 2. *Если $s \in \overline{1,N}$ и $(x,K) \in D_s$, то*

$$\mathcal{V}_s(x,K) = \min_{j\in\mathbf{I}(K)} \min_{z\in M_j\times M_j} \big[\mathbf{c}_j\big(x, \mathrm{pr}_1(z), N-|K|+1\big)+c_j(z, N-|K|+1)+$$
$$+\mathcal{V}_{s-1}\big(\mathrm{pr}_2(z), K\setminus\{j\}\big)\big].$$

Доказательство сводится к очевидной комбинации предложения 3.1 и (4.13).

Теперь построение (4.12) можно осуществить по следующей схеме. Функция $\mathcal{V}_o$ определяется по правилу (4.10). Пусть теперь $m \in \overline{0, N-1}$ и функция $\mathcal{V}_m$ нам уже известна (т. е. построена). Тогда функцию $\mathcal{V}_{m+1} : D_{m+1} \longrightarrow [0,\infty[$ определяем, используя предложение 2 при $s = m+1$:

$$\begin{gathered}\mathcal{V}_{m+1}(x,K) = \min_{j\in\mathbf{I}(K)} \min_{z\in M_j\times M_j} \big[\mathbf{c}_j\big(x, \mathrm{pr}_1(z), N-|K|+1\big)+ \\ +c_j(z, N-|K|+1)+\mathcal{V}_m\big(\mathrm{pr}_2(z), K\setminus\{j\}\big)\big] \quad \forall (x,K)\in D_{m+1}.\end{gathered} \tag{4.14}$$

Посредством (4.14) реализуется преобразование $\mathcal{V}_m \to \mathcal{V}_{m+1}$, т. е. регулярный шаг (этап) процедуры (4.12). После конечного числа таких регулярных шагов (требуется N преобразований упомянутого типа) будут построены все функции (4.8) и, в частности, будет определен (см. (4.11)) искомый экстремум ОЗМ, т. е. значение V.

5. Построение оптимального решения

В настоящем разделе рассматривается построение оптимального решения в виде соответствующей пары маршрут-трасса. Тем самым решение ОЗМ (2.12) будет завершено. Используем предложение 2 и полагаем известными функции $\mathcal{V}_o, \mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_N$ (см. рекуррентную процедуру предыдущего раздела). Пусть $\mathbf{z}_o \stackrel{\triangle}{=} (x^o, x^o)$.

Из (4.11) и предложения 5.1 следует равенство

$$V = \min_{j\in\mathbf{I}(\overline{1,N})} \min_{z\in M_j\times M_j} \big[\mathbf{c}_j\big(x^o, \mathrm{pr}_1(z), 1\big)+c_j(z,1)+\mathcal{V}_{N-1}\big(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N}\setminus\{j\}\big)\big], \tag{5.1}$$

где согласно (4.13) $\big(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N}\setminus\{k\}\big) \in D_{N-1} \quad \forall k \in \mathbf{I}(\overline{1,N}) \quad \forall z \in M_k \times M_k$. С учетом (5.1) выбираем индекс $\mathbf{k}_1 \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$ и УП $\mathbf{z}_1 \in M_{\mathbf{k}_1} \times M_{\mathbf{k}_1}$ так, что при этом

$$\begin{gathered}V = \mathbf{c}_{\mathbf{k}_1}\big(x^o, \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}_1), 1\big)+c_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{z}_1,1)+\mathcal{V}_{N-1}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_1), \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{k}_1\}\big)= \\ = \mathbf{c}_{\mathbf{k}_1}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_o), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}_1), 1\big)+c_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{z}_1,1)+\mathcal{V}_{N-1}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_1), \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{k}_1\}\big).\end{gathered} \tag{5.2}$$

Тогда $\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_1), \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{k}_1\}\big) \in D_{N-1},\ |\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{k}_1\}| = N-1$ и согласно предложению 5.1

$$\begin{gathered}\mathcal{V}_{N-1}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_1), \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{k}_1\}\big)= \min_{j\in\mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{k}_1\})} \min_{z\in M_j\times M_j} \big[\mathbf{c}_j\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_1), \mathrm{pr}_1(z), 2\big)+ \\ +c_j(z,2)+\mathcal{V}_{N-2}\big(\mathrm{pr}_2(z), (\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{k}_1\})\setminus\{j\}\big)\big],\end{gathered} \tag{5.3}$$

где согласно (4.13) $\big(\mathrm{pr}_2(z), (\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{k}_1\})\setminus\{k\}\big)= \big(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{k}_1;k\}\big) \in D_{N-2} \quad \forall k \in \mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus \{\mathbf{k}_1\}) \ \forall z \in M_k\times M_k$. С учетом (5.3) выбираем индекс $\mathbf{k}_2 \in \mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{k}_1\})$ и УП $\mathbf{z}_2 \in M_{\mathbf{k}_2}\times M_{\mathbf{k}_2}$, для которых

$$\begin{gathered}\mathcal{V}_{N-1}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_1), \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{k}_1\}\big)= \mathbf{c}_{\mathbf{k}_2}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_1), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}_2), 2\big)+c_{\mathbf{k}_2}(\mathbf{z}_2,2)+ \\ +\mathcal{V}_{N-2}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_2), \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_2\}\big).\end{gathered} \tag{5.4}$$

Тогда $\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_2), \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_2\}\big) = \big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_2), \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{k}_i : i \in \overline{1,2}\}\big) \in D_{N-2}$ и $|\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_2\}| = N-2$. Отметим, что из (5.2) и (5.4) вытекает равенство

$$V = \sum_{t=1}^{2} \mathbf{c}_{\mathbf{k}_t}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_{t-1}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}_t), t\big) + \sum_{t=1}^{2} c_{\mathbf{k}_t}(\mathbf{z}_t, t) + \mathcal{V}_{N-2}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_2), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{k}_t : t \in \overline{1,2}\}\big). \quad (5.5)$$

Пусть теперь $\mathbf{r} \in \overline{2,N}$ таково, что уже построены кортежи

$$(\mathbf{k}_i)_{i\in\overline{1,\mathbf{r}}} : \overline{1,\mathbf{r}} \longrightarrow \overline{1,N}, \quad (5.6)$$

$$(\mathbf{z}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{r}}} : \overline{0,\mathbf{r}} \longrightarrow \mathbf{X} \times \mathbf{X}, \quad (5.7)$$

для которых выполнены следующие условия:

$1')$ $\mathbf{k}_{i_1} \neq \mathbf{k}_{i_2} \quad \forall i_1 \in \overline{1,\mathbf{r}} \quad \forall i_2 \in \overline{1,\mathbf{r}} \setminus \{i_1\}$;

$2')$ $\mathbf{z}_t \in M_{\mathbf{k}_t} \times M_{\mathbf{k}_t} \quad \forall t \in \overline{1,\mathbf{r}}$;

$3')$ $\mathbf{k}_t \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{k}_i : i \in \overline{1,t-1}\}) \quad \forall t \in \overline{1,\mathbf{r}}$;

$4')$ $\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_t), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{k}_i : i \in \overline{1,t}\}\big) \in D_{N-t} \quad \forall t \in \overline{1,\mathbf{r}}$;

$5')$ $\mathcal{V}_{N-t+1}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_{t-1}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{k}_i : i \in \overline{1,t-1}\}\big) = \mathbf{c}_{\mathbf{k}_t}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_{t-1}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}_t), t\big) + c_{\mathbf{k}_t}(\mathbf{z}_t, t) + \mathcal{V}_{N-t}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_t), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{k}_i : i \in \overline{1,t}\}\big) \quad \forall t \in \overline{1,\mathbf{r}}$;

$6')$ $V = \sum\limits_{t=1}^{\mathbf{r}} \mathbf{c}_{\mathbf{k}_t}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_{t-1}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}_t), t\big) + \sum\limits_{t=1}^{\mathbf{r}} c_{\mathbf{k}_t}(\mathbf{z}_t, t) + \mathcal{V}_{N-\mathbf{r}}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_{\mathbf{r}}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{k}_t : t \in \overline{1,\mathbf{r}}\}\big)$.

Замечание 3. Заметим, что кортежи $(\mathbf{k}_i)_{i\in\overline{1,2}}$ и $(\mathbf{z}_i)_{i\in\overline{0,2}}$ были построены ранее, причем в случае $\mathbf{r} = 2$ все условия $1') - 6')$ для них выполняются. Действительно, по выбору $\mathbf{k}_2$ имеем (см. (3.2)), что $\mathbf{k}_1 \neq \mathbf{k}_2$, что доставляет $1')$; $2')$ выполняется по выбору $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$. В связи с $3')$ отметим, что $\overline{1,0} = \emptyset$, а тогда $\{\mathbf{k}_i : i \in \overline{1,t-1}\}$ при $t = 1$ есть пустое множество (образ $\emptyset$ совпадает с $\emptyset$). Поэтому $3')$ выполняется по выбору $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$. Свойство $4')$ также выполнено, что оговаривалось в виде следствия (4.13) при выборе УП $(\mathbf{k}_1, \mathbf{z}_1)$ и $(\mathbf{k}_2, \mathbf{z}_2)$. Свойство $5')$ следует из (5.2) и (5.4) с учетом (4.11). Наконец, $6')$ следует при $\mathbf{r} = 2$ из (5.5).

Возвращаясь к общему случаю кортежей (5.6), (5.7), отметим, что $(\mathbf{r} = N) \vee (\mathbf{r} \in \overline{2,N-1})$. Эти случаи мы рассмотрим отдельно.

а) Пусть $\mathbf{r} = N$. Тогда кортеж (5.6) является отображением, действующим в $\overline{1,N}$, а (5.7) является элементом $\mathbf{Z}$: $(\mathbf{z}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{r}}} = (\mathbf{z}_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathbf{Z}$. Из $1')$ следует инъективность отображения $\eta \overset{\triangle}{=} (\mathbf{k}_i)_{i\in\overline{1,N}}$, а тогда $\eta \in \mathbb{P}$, где согласно $3')$ $\eta(t) \overset{\triangle}{=} \mathbf{I}\big(\overline{1,N} \setminus \{\eta(i) : i \in \overline{1,t-1}\}\big) \quad \forall t \in \overline{1,N}$. Последнее означает с учетом биективности η справедливость свойства $\eta(t) \in \mathbf{I}(\{\eta(j) : j \in \overline{t,N}\}) \quad \forall t \in \overline{1,N}$. В итоге (см. (3.3), (3.4)) $\eta \in \mathbb{A}$. Учитывая $2')$, получаем в силу (2.10), что $(\mathbf{z}_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\eta$. Тогда $\big(\eta, (\mathbf{z}_i)_{i\in\overline{0,N}}\big)$ есть допустимое решение. Согласно (2.11)

$$\Pi\big(\eta, (\mathbf{z}_i)_{i\in\overline{0,N}}\big) = \sum_{t=1}^{N} \mathbf{c}_{\eta(t)}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_{t-1}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}_t), t\big) + \sum_{t=1}^{N} c_{\eta(t)}(\mathbf{z}_t, t) + f\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_N)\big). \quad (5.8)$$

Вместе с тем согласно $4')$ в рассматриваемом сейчас случае

$$\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_N), \overline{1,N} \setminus \{\eta(t) : t \in \overline{1,N}\}\big) = \big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_N), \emptyset\big) \in D_o,$$

т. к. η – сюръекция. Это означает, что $\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_N) \in \mathbf{M}$ и

$$\mathcal{V}_{N-\mathbf{r}}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_r), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{k}_t : t \in \overline{1,\mathbf{r}}\}\big) = \mathcal{V}_o\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_N), \emptyset\big) = f\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_N)\big)$$

(см. (4.10) и определение D_o в разделе 5). С учетом (5.8), 6′) и определения η имеем, однако,

$$V=\sum_{t=1}^{N}\mathbf{c}_{\eta(t)}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_{t-1}),\mathrm{pr}_1(\mathbf{z}_t),t\big)+\sum_{t=1}^{N}c_{\eta(t)}(\mathbf{z}_t,t)+f\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_N)\big)=\Pi\big(\eta,(\mathbf{z}_i)_{i\in\overline{0,n}}\big).$$

Это означает (см. (2.12), (2.13)), что $\big(\eta,(\mathbf{z}_i)_{i\in\overline{0,N}}\big)$ есть оптимальное решение ОЗМ. Итак, в случае a) мы уже располагаем оптимальным решением.

b) Пусть $\mathbf{r}\in\overline{2,N-1}$. Тогда $\mathbf{r}+1\in\overline{3,N}$. Из 4′) следует, в частности, что

$$\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_\mathbf{r}),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{k}_i:\ i\in\overline{1,\mathbf{r}}\}\big)\in D_{N-\mathbf{r}}. \tag{5.9}$$

При этом $N-\mathbf{r}\in\overline{1,N-2}$, $N-(\mathbf{r}+1)=(N-\mathbf{r})-1$. Воспользуемся предложением 2 при условии, что $s=N-\mathbf{r}$ и (x,K) совпадает с позицией (5.9):

$$\begin{gathered}\mathcal{V}_{N-\mathbf{r}}\big(\mathrm{pr}_2(z_\mathbf{r}),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{k}_i:\ i\in\overline{1,r}\}\big)=\\ \min_{j\in\mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{k}_i:i\in\overline{1,\mathbf{r}}\})}\ \min_{z\in M_j\times M_j}\big[\mathbf{c}_j\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_\mathbf{r}),\mathrm{pr}_1(z),N-|\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{k}_i:\ i\in\overline{1,\mathbf{r}}\}|+1\big)+\\ c_j(z,N-|\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{k}_i:\ i\in\overline{1,\mathbf{r}}\}|+1)+\mathcal{V}_{N-(\mathbf{r}+1)}\big(\mathrm{pr}_2(z),(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{k}_i:\ i\in\overline{1,\mathbf{r}}\})\setminus\{j\}\big)\big],\end{gathered}\tag{5.10}$$

где в силу 1′) $|\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{k}_i:\ i\in\overline{1,\mathbf{r}}\}|=N-\mathbf{r}$, т. к. $|\{\mathbf{k}_i:\ i\in\overline{1,\mathbf{r}}\}|=\mathbf{r}$. С учетом этого, а также (5.10), выбираем $\mathbf{k}_{\mathbf{r}+1}\in\mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{k}_i:\in\overline{1,\mathbf{r}}\})$ и $\mathbf{z}_{\mathbf{r}+1}\in M_{\mathbf{k}_{\mathbf{r}+1}}\times M_{\mathbf{k}_{\mathbf{r}+1}}$ так, что

$$\begin{gathered}\mathcal{V}_{N-\mathbf{r}}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_\mathbf{r}),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{k}_i:\ i\in\overline{1,\mathbf{r}}\}\big)=\mathbf{c}_{\mathbf{k}_{\mathbf{r}+1}}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_\mathbf{r}),\mathrm{pr}_1(\mathbf{z}_{\mathbf{r}+1}),\mathbf{r}+1\big)+\\ +c_{\mathbf{k}_{\mathbf{r}+1}}(\mathbf{z}_{\mathbf{r}+1},\mathbf{r}+1)+\mathcal{V}_{N-(\mathbf{r}+1)}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_{\mathbf{r}+1}),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{k}_i:\ i\in\overline{1,\mathbf{r}+1}\}\big).\end{gathered}\tag{5.11}$$

Тогда, в частности, $\mathbf{z}_{\mathbf{r}+1}\in\mathbf{X}\times\mathbf{X}$. Получили два новых кортежа

$$(\mathbf{k}_i)_{i\in\overline{1,\mathbf{r}+1}}:\ \overline{1,\mathbf{r}+1}\longrightarrow\overline{1,N},(\mathbf{z}_i)_{i\in\overline{0,\mathbf{r}+1}}:\ \overline{0,\mathbf{r}+1}\longrightarrow\mathbf{X}\times\mathbf{X}.$$

По выбору $\mathbf{k}_{\mathbf{r}+1}$ имеем из (3.2), что $\mathbf{k}_{\mathbf{r}+1}\neq\mathbf{k}_i\quad\forall i\in\overline{1,\mathbf{r}}$. С учетом 1′) получаем

1″) $\mathbf{k}_{i_1}\neq\mathbf{k}_{i_2}\quad\forall i_1\in\overline{1,\mathbf{r}+1}\quad\forall i_2\in\overline{1,\mathbf{r}+1}\setminus\{i_1\}$.

Далее, из 2′) имеем по выбору $\mathbf{z}_{\mathbf{r}+1}$, что справедливо свойство

2″) $\mathbf{z}_t\in M_{\mathbf{k}_t}\times M_{\mathbf{k}_t}\quad\forall t\in\overline{1,\mathbf{r}+1}$.

Из 3′) имеем по выбору $\mathbf{k}_{\mathbf{r}+1}$ следующее положение:

3″) $\mathbf{k}_t\in\mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{k}_i:\ i\in\overline{1,t-1}\})\quad\forall t\in\overline{1,\mathbf{r}+1}$.

Заметим, что согласно (4.13) и (5.9) получаем по выбору $\mathbf{k}_{\mathbf{r}+1}$ и $\mathbf{z}_{\mathbf{r}+1}$, что

$$\begin{gathered}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_{\mathbf{r}+1}),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{k}_i:\ i\in\overline{1,\mathbf{r}+1}\}\big)=\\ =\Big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_{\mathbf{r}+1}),(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{k}_i:\ i\in\overline{1,\mathbf{r}}\})\setminus\{\mathbf{k}_{\mathbf{r}+1}\}\Big)\in D_{N-(\mathbf{r}+1)}.\end{gathered}\tag{5.12}$$

Из 4′) и (5.12) вытекает 4″) $\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_t),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{k}_i:\ i\in\overline{1,t}\}\big)\in D_{N-t}\quad\forall t\in\overline{1,\mathbf{r}+1}$. Отметим теперь, что согласно (5.11) при $t=\mathbf{r}+1$ имеем равенство

$$\mathcal{V}_{N-t+1}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_{t-1}),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{k}_i:\ i\in\overline{1,t-1}\}\big)=\mathbf{c}_{\mathbf{k}_t}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_{t-1}),\mathrm{pr}_1(\mathbf{z}_t),t\big)+$$

$$+c_{\mathbf{k}_t}(\mathbf{z}_t,t)+\mathcal{V}_{N-t}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_t),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{k}_i:\ i\in\overline{1,t}\}\big).$$

С учетом этого равенства и 5′) мы получаем, что справедливо свойство

5″) $\mathcal{V}_{N-t+1}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_{t-1}),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{k}_i:\ i\in\overline{1,t-1}\}\big)=\mathbf{c}_{\mathbf{k}_t}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_{t-1}),\mathrm{pr}_1(\mathbf{z}_t),t\big)+c_{\mathbf{k}_t}(\mathbf{z}_t,t)+\mathcal{V}_{N-t}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_t),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{k}_i:\ i\in\overline{1,t}\}\big)\quad\forall t\in\overline{1,\mathbf{r}+1}$.

Наконец, из 6′) и (5.11) вытекает равенство

6″) $V = \sum_{t=1}^{\mathbf{r}+1} \mathbf{c}_{\mathbf{k}_t}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_{t-1}), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}_t), t\big) + \sum_{t=1}^{\mathbf{r}+1} c_{\mathbf{k}_t}(\mathbf{z}_t, t) + \mathcal{V}_{N-(\mathbf{r}+1)}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}_{\mathbf{r}+1}), \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{k}_i : i \in \overline{1,\mathbf{r}+1}\}\big)$.

Таким образом, мы сумели продолжить каждый из кортежей (5.6), (5.7) на один шаг (этап) с сохранением всех основных свойств: система условий $1' - 6'$ преобразована в подобную систему $1'' - 6''$. После выполнения конечного числа шагов типа b) (требуется N шагов) мы неизбежно придем к ситуации случая a), т.е. к оптимальному решению ОЗМ.

6. Модельный пример

В настоящем разделе исследуется модельный пример ОЗМ. Речь пойдет о плоской задаче маршрутизации: $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Итак, на плоскости фиксируется база x^o в виде нулевого вектора: $x^o = (0,0)$. В качестве $\rho : X \times X \to [0, \infty[$ используем функцию евклидова расстояния: при $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ число $\rho(x_1, x_2)$ есть евклидово расстояние между векторами x_1 и x_2. Полагаем в настоящем разделе, что $N = 27$. Каждый мегаполис $M_1, \ldots, M_{27}$ задается равномерной сеткой на окружности положительного радиуса. Итак, мы полагаем заданными два кортежа $(\mathcal{O}_i)_{i\in\overline{1,N}} : \overline{1,N} \longrightarrow X$, $(R_i)_{i\in\overline{1,N}} : \overline{1,N} \longrightarrow]0,\infty[$; если $j \in \overline{1,N}$, то $\mathcal{O}_j$ определяет центр, а R_j – радиус окружности. Полагаем, что $|M_j| = 50 \ \ \forall j \in \overline{1,N}$. Точки M_j можно рассматривать как входы-выходы в помещение, в пределах которого исполнителю следует достичь заданной точки и, выполнив там некоторое действие, покинуть помещение, вновь используя «дверь», т.е. некоторый элемент M_j. Упомянутую точку именуем «рубильником». Итак, мы фиксируем точки $a_1 \in X, \ldots, a_N \in X$. Целью внутренних работ является приведение в действие «рубильника», связанного с каждым мегаполисом. Рассмотрим соответствующую детализацию функций стоимости. Полагаем, что при $s \in \overline{1,N}$ функция $\mathbf{c}_s$ определяется условием: $\mathbf{c}_s(x,y,t) \stackrel{\triangle}{=} t\,\rho(x,y)$ при $x \in \mathbf{X}$, $y \in M_s$ и $t \in \overline{1,N}$. Тем самым определены стоимости внешних перемещений. Для оценивания внутренних работ используются функции $c_1, \ldots, c_N$, определяемые следующим образом: если $s \in \overline{1,N}$, $x \in M_s$, $y \in M_s$ и $t \in \overline{1,N}$, то

$$c_s(x,y,t) \stackrel{\triangle}{=} t\,s\,\rho(x,a_s) + t\,s\,\rho(a_s,y).$$

Наконец, функцию f отождествляем с евклидовой нормой на плоскости X. Тем самым определены функции стоимости $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_N, c_1, \ldots, c_N, f$. Предполагается, что задано двадцатиэлементное множество $\mathbf{K}$, определяющее условия предшествования (итак, имеем 20 адресных пар). Для решения задачи использовался вариант метода динамического программирования, изложенный в статье и реализующий оптимальное решение ОЗМ (2.12). Время счета 58 мин 50 с.

Для вычислений использовалась программа, написанная на Microsoft Visual C++ 2005. Вычисления производились на ПЭВМ с процессором Intel i7-2630QM с 8Гб оперативной памяти, работающей под управлением Windows 7 (рис. 1).

Далее, вычисления были проведены при тех же исходных данных, но в случае

$$c_s(x,y,t) \stackrel{\triangle}{=} \frac{t}{s}\rho(x,a_s) + \frac{t}{s}\rho(a_s,y) \ \ \forall s \in \overline{1,N}\ \forall x \in M_s\ \forall y \in M_s \forall t \in \overline{1,N}.$$

Итак, были изменены стоимости внутренних работ. Маршрут и трасса обхода мегаполисов имеет в этом случае следующий вид (см. рис. 2) (время счета 1 ч 07 мин).

Из графиков видно, что алгоритм реагирует на изменение внутренних работ «смещением акцентов» на выполнение внешних перемещений, ориентируясь на почти кратчайшие переходы (геометрическое решение), в то время как в первом случае превалировали элементы экономного проведения внутренних перемещений.

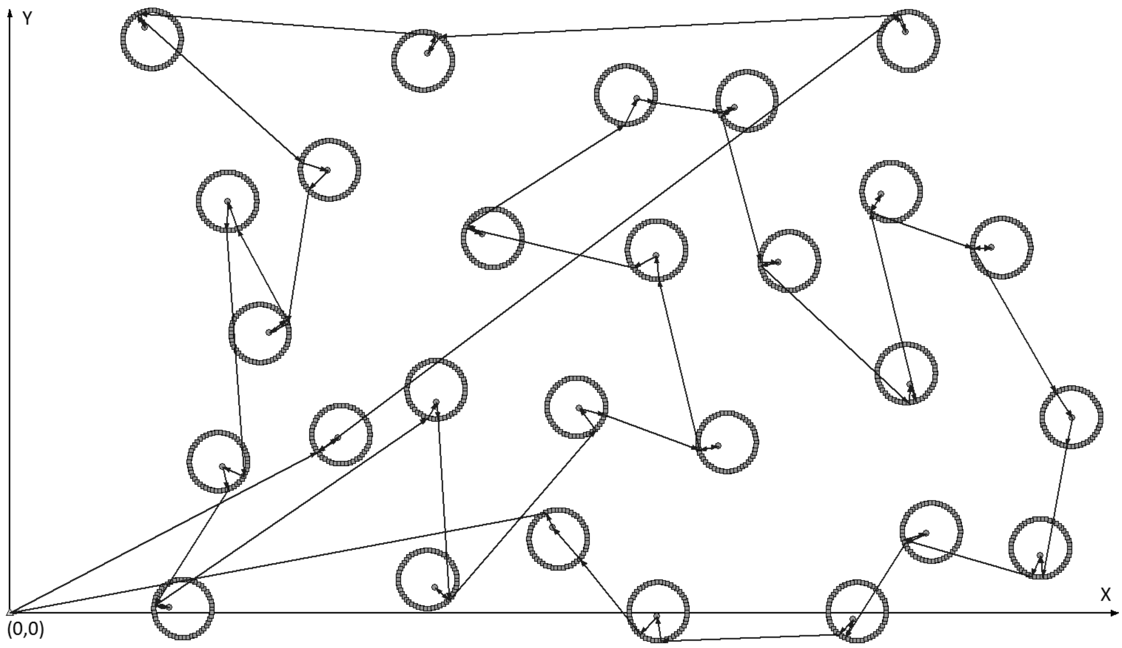

Рис. 1. Маршрут и трасса обхода множеств, первый пример

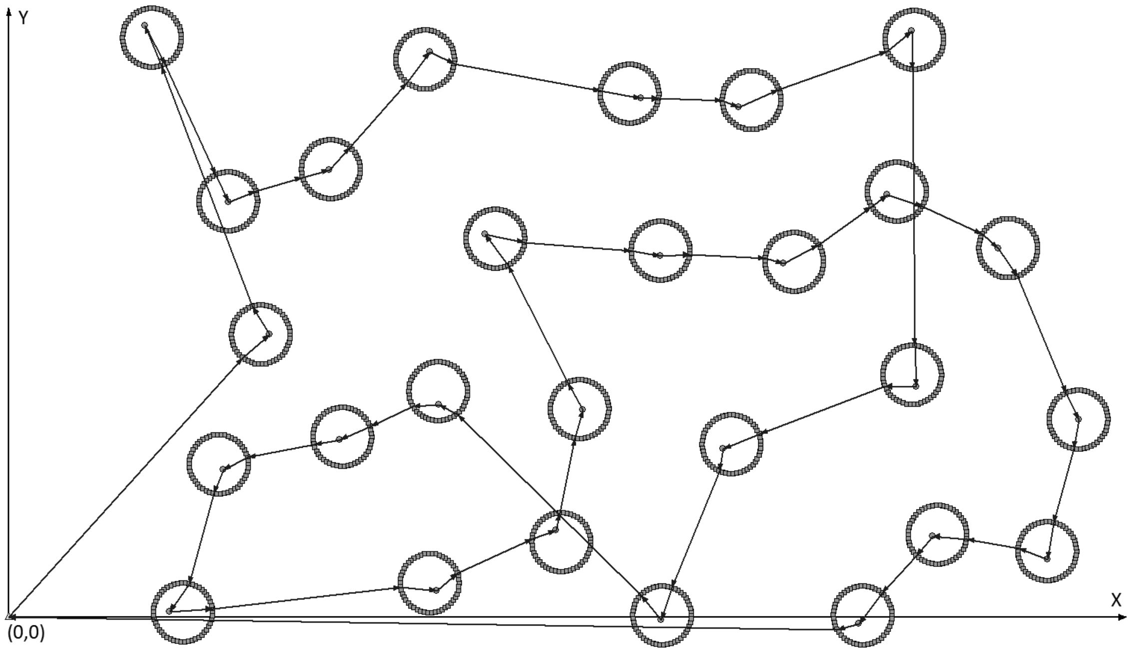

Рис. 2. Маршрут и трасса обхода множеств, второй пример

Заключение

Исследуемая в статье задача имеет своим прототипом известную (труднорешаемую) задачу коммивояжера, которая является одной из классических NP-полных задач [8]. В связи с методами решения задачи коммивояжера см., в частности, [9–11]. Отметим широкое использование метода ветвей и границ [12]. В работах [13, 14] для решения задачи коммивояжера построен вариант метода динамического программирования. Задачи о посещении кластеров в пространстве «городов» рассматривались в [15–17]. Последовательное развитие идеи динамического программирования на задачи о посещении конечномерных компактов дано в [18, 19] и в ряде последующих работ. Работы [1–4] определили следующее серьезное продвижение: в качестве фрагментов маршрута встраивались разнообразные (внутренние) работы, выполняемые в пределах мегаполисов. При этом существенную роль в постренииреализуемых процедур сыграло использование, для целей экономии вычислений, условий предшествования, что было сделано в [20, 21] и в ряде других работ. В [22–25] исследовались вопросы применения вышеупомянутых теоретических методов в некоторых задачах атомной энергетики (в связи с общими проблемами ядерной энергетики см. [26]). Сейчас отметим только инженерную задачу минимизации дозовой нагрузки персонала АЭС при выполнении работ в помещениях с повышенным уровнем радиации. Исследуется возможность снижения облучаемости посредством рационального выбора маршрута перемещений на территории станции, при выборе которого следует учитывать работы в помещениях с соблюдением технологических требований. Возможен вариант, отвечающий аварийной ситуации (Чернобыль, Фукусима), при которой учет временных зависимостей хотя бы на грубом уровне (попытка такого учета сделана в настоящей работе) может способствовать лучшей реализации вышеупомянутой возможности.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (10-01-96020, 10-08-00484).

Литература

1. Ченцов, А.А. Экстремальная задача маршрутизации с внутренними потерями / А.А. Ченцов, А.Г. Ченцов, П.А. Ченцов // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2008. – Т. 14, № 3. – С. 183–201.
2. Ченцов, А.А. Экстремальная задача маршрутизации перемещений с ограничениями и внутренними потерями / А.А. Ченцов, А.Г. Ченцов, П.А. Ченцов // Изв. ВУЗов. Математика. – 2010. – № 6. – С. 64–81.
3. Ченцов, А.Г. Метод динамического программирования в экстремальных задачах маршрутизации с ограничениями / А.Г. Ченцов // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2010. – № 3. – С. 52–66.
4. Ченцов, А.Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории / А.Г. Ченцов. – М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский ин-т компьютер. исследований, 2008. – 240 с.
5. Тонков, Л.В. К вопросу оптимального выбора маршрута в условиях временного дисконтирования / Л.В. Тонков, А.Г. Ченцов // Кибернетика и систем. анализ. – 1999. – № 1. – С. 95–106.
6. Куратовский, К. Теория множеств / К. Куратовский, А. Мостовский. – М.: Мир, 1970. – 416 с.
7. Кормен, Т. Алгоритмы: построение и анализ / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест. – М.: МЦНМО, 2002. – 960 с.
8. Гэри, М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон; пер. с англ. Е.В. Левнера и М.А. Фрумкина. – М.: Мир, 1982. – 416 с.
9. Меламед, И.И. Задача коммивояжера. Вопросы теории / И.И. Меламед, С.И. Сергеев, И.Х. Сигал // Автоматика и телемеханика. – 1989. – № 9. – С. 3–34.

10. Меламед, И.И. Задача коммивояжера. Точные алгоритмы / И.И. Меламед, С.И. Сергеев, И.Х. Сигал // Автоматика и телемеханика. – 1989. – № 10. – С. 3–29.
11. Меламед, И.И. Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы / И.И. Меламед, С.И. Сергеев, И.Х. Сигал // Автоматика и телемеханика. – 1989. – № 11. – С. 3–26.
12. Алгоритмы для решения задачи о коммивояжере / Дж. Литл, К. Мурти, Д. Суини, К. Кэрел // Экономика и математические методы. – 1965. – Т. 1, вып. 1. – С. 94–107.
13. Беллман, Р. Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере / Р. Беллман // Кибернетический сборник. – М.: Мир, 1964. – Т. 9. – С. 219–228.
14. Хелд М., Карп Р.М. Применение динамического программирования к задачам упорядочения / М. Хелд, Р.М. Карп // Кибернетический сборник. – М.: Мир, 1964. – Т. 9. – С. 202–218.
15. Laporte, G. Generalized Travelling Salesman Problem Through n-Sets of Nodes: an Integer Programming Approach / G. Laporte, Y. Nobert // INFOR. – 1983. – V. 21, № 1. – P. 61–75.
16. Henry-Labordere, A.L. The Record-Balancing Problem: a Dynamic Programming Solution of a Generalized Travelling Salesman Problem / A.L. Henry-Labordere // Rev. Franc. Inform. Rech. – 1969. – V. 3 – № 2. – P. 43–49.
17. Лейтен, А.К. Некоторые модификации задачи коммивояжера / А.К. Лейтен // Тр. ВЦ Тарт. ун-та. – 1973. – Вып. 28. – С. 44–58.
18. Коротаева, Л.Н. Об одной модификации метода динамического программирования в задаче последовательного сближения / Л.Н. Коротаева, А.Н. Сесекин, А.Г. Ченцов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1989. – Т. 29, № 8. – С. 1107–1113.
19. Ченцов, А.А. О решении задачи маршрутной оптимизации методом динамического программирования / А.А. Ченцов, А.Г. Ченцов // Автоматика и телемеханика. – 1998. – № 9. – С. 117–129.
20. Ченцов, А.Г. Маршрутизация с условиями предшествования (задача курьера): метод динамического программирования / А.Г. Ченцов, П.А. Ченцов // Вестн. УГТУ-УПИ. На передовых рубежах науки и инженерного творчества. – Екатеринбург, 2004. – Ч. 1, № 15 (45) – С. 148–152.
21. Ченцов, А.А. О реализации метода динамического программирования в обобщенной задаче курьера / А.А. Ченцов, А.Г. Ченцов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2007. – Т. 13, № 3. – С. 136–160.
22. Разработка оптимальных алгоритмов вывода АЭС из эксплуатации с использованием методов математического моделирования / О.Л. Ташлыков, А.Н. Сесекин, С.Е. Щеклеин, А.Г. Ченцов// Изв. ВУЗов. Ядерная энергетика. – 2009. – № 2. – С. 115–120.
23. Возможности математических методов моделирования в решении проблемы снижения облучаемости персонала / О.Л. Ташлыков, А.Н. Сесекин, С.Е. Щеклеин, Ф.А. Балушкин, А.Г. Ченцов, А.П. Хомяков // Вопросы радиационной безопасности. – 2009. – № 4. – С. 39–49.
24. Использование метода динамического программирования для оптимизации траектории перемещения работников в радиационно опасных зонах с целью минимизации облучения / А.Н. Сесекин, О.Л. Ташлыков, С.Е. Щеклеин, М.Ю. Куклин, А.Г. Ченцов, А.А. Кадников // Изв. ВУЗов. Ядерная энергетика. – 2006. – № 2. – С. 41–48.
25. Сесекин, А.Н. Задачи маршрутизации перемещений / А.Н. Сесекин, А.А. Ченцов, А.Г. Ченцов. – СПб: Лань, 2011. – 240 с.
26. Ташлыков, О.Л. Организация и технология атомной энергетики / О.Л. Ташлыков. – Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2005. – 148 с.

Александр Георгиевич Ченцов, член-корреспондент РАН, зав. отделом, Институт математики и механики УрО РАН (г. Екатеринбург, Российская Федерация), chentsov@imm.uran.ru.

Павел Александрович Ченцов, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт математики и механики УрО РАН (г. Екатеринбург, Российская Федерация), chentsov.p@uran.ru.

Bulletin of the South Ural State University.
Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»,
2013, vol. 6, no. 2, pp. 88–107.

MSC 93CXX

On the Nonstationary Variant of Generalized Courier Problem with Interior Works

A.G. Chentsov, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation, chentsov@imm.uran.ru,
P.A. Chentsov, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation, chentsov.p@uran.ru

The problem of the sequential circuit of megalopolises with preceding conditions and necessity of the interior works in megalopolises is considered in the article. It is supposed that the costs of permutations depend on the parameter having the sense of a discrete time. The above-mentioned dependence can reflect priorities of clients connected with served megalopolises and partially compensating inputs of executers. The constructed method corresponds to dynamic programming in a broad sense which is applied to solve the route problem with constraints. The extension of the problem, which use equivalent transformation of the system of constraints as a result of which route admissibility by precedence is changed into admissibility by deletion (the task from the list), introduced in the article. Therefore route constraints are reduced to the system of constraints by current interchange that allows us to obtain Bellman equations. To apply the later in the computational procedure of layers construction of Bellman equation we use the approach which implies the construction of the whole array of the values for the function mentioned; this approach is based on the use of essential lists of tasks (by precedence), which the saving of computations is achieved by.

The use of the theory developed can be connected with the problems dealing with the reduction of radioactive influence on employees of atomic power plants at work under emergency conditions as well as the problems of transport service for a great number of clients under conditions of priority influencing the choice of service discipline.

Keywords: route, preceding conditions, dynamic programming.

References

1. Chentsov A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A. Extreme Routing Problem with Internal Losses [Ekstremal'naya zadacha marshrutizatsii s vnutrennimi poteryami]. *Trudy Instituta matematiki i mehaniki UrO RAN,* 2008, vol. 14, no. 3, pp. 183–201.

2. Chentsov A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A. An Extremal Constrained Routing Problem with Internal Losses. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika),* 2010, vol. 54, no. 6, pp. 54–68.

3. Chentsov A.G. Dynamic Programming Method in the Extreme Routing Problems with Constraints [Metod dinamicheskogo programmirovaniya v ekstremal'nykh zadachakh marshrutizatsii s ogranicheniyami]. *Izvestia Rossiiskoi Akademii Nauk. Teoriya i Systemy Upravleniya* [Journal of Computer and Systems Sciences International], 2010, no. 3, pp. 52–66.
4. Chentsov A.G. *Ekstremal'nye zadachi marshrutizatsii i raspredeleniya zadaniy: voprosy teorii* [Extreme Problems Routing and Assignment of Tasks: Theory]. Moscow, Izhevsk, 2008. 240 p.
5. Tonkov L.V., Chentsov A.G. On the Question of the Optimal Choice Route in Temporary Discount [K voprosu optimal'nogo vybora marshruta v usloviyakh vremennogo diskontirovaniya]. *Kibernetika i sistem. analiz* [Cybernetics and Systems Analysis], 1999, no. 1, pp. 95–106.
6. Kuratovskij K., Mostovskij A. *Teoriya mnozhestv* [Set Theory]. Moscow, Mir, 1970. 416 p.
7. Cormen T.H., Leiserson C.E., Rivest R. L., Stein C. *Introduction to Algorithms.* MIT Press, 2009. 1312 p.
8. Garey M.R., Johnson D.S. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness.* N.Y., W.H. Freeman & CO, 1979. 416 p.
9. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.H. The Traveling Salesman Problem. Problems in the Theory [Zadacha kommivoyazhera. Voprosy teorii]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1989, no. 9, pp. 3–34.
10. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.H. The Traveling Salesman Problem. The Exact Algorithm [Zadacha kommivoyazhera. Tochnye algoritmy]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1989, no. 10, pp. 3–29.
11. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.H. The Traveling Salesman Problem. Approximate Algorithms [Zadacha kommivoyazhera. Priblizhennye algoritmy]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1989, no. 11, pp. 3–26.
12. Litl Dzh., Murti K., Suini D., Kjerel K. Algorithms for Solving the Traveling Salesman Problem [Algoritmy dlya resheniya zadachi o kommivoyazhere]. *Ekonomika i matematicheskie metody* [Economics and Mathematical Methods], 1965, vol. 1, pp. 94–107.
13. Bellman R. The Application of Dynamic Programming Problem to the Traveling Salesman [Primenenie dinamicheskogo programmirovaniya k zadache o kommivoyazhere]. *Kiberneticheskij sbornik*, Moscow, Mir, 1964, vol. 9, pp. 219–228.
14. Held M., Karp R.M. The Use of Dynamic Programming to the Problem of Ordering [Primenenie dinamicheskogo programmirovaniya k zadacham uporyadocheniya]. *Kiberneticheskij sbornik*, Moscow, Mir, 1964, vol. 9, pp. 202–218.
15. Laporte G., Nobert Y. Generalized Travelling Salesman Problem Through n-Sets of Nodes: an Integer Programming Approach. *INFOR,* 1983, vol. 21, no. 1, pp. 61–75.
16. Henry-Labordere A.L. The Record-Balancing Problem: a Dynamic Programming Solution of a Generalized Travelling Salesman Problem. *Rev. Franc. Inform. Rech.,* 1969, vol. 3, no. 2, pp. 43–49.
17. Lejten A.K. Some Modifications of the Traveling Salesman Problem [Nekotorye modifikatsii zadachi kommivoyazhera]. *Tr. VC Tart. un-ta,* 1973, issue 28, pp. 44–58.
18. Korotaeva L.N., Sesekin A.N., Chentsov A.G. A Modification of the Dynamic Programming Method in the Problem of Sequential Approach [Ob odnoy modifikatsii metoda dinamicheskogo programmirovaniya v zadache posledovatel'nogo sblizheniya]. *Zhurn. vychisl. matematiki i mat. Fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1989, vol. 29, no. 8, pp. 1107–1113.

19. Chentsov A.A., Chentsov A.G. The Solution of the Route Optimization by Dynamic Programming [O reshenii zadachi marshrutnoy optimizatsii metodom dinamicheskogo programmirovaniya]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1998, no. 9, pp. 117–129.
20. Chentsov A.G., Chentsov P.A. Routing to the Terms of Precedence (Task Courier): Dynamic Programming Method [Marshrutizatsiya s usloviyami predshestvovaniya (zadacha kur'era): metod dinamicheskogo programmirovaniya]. *Vestnik UGTU-UPI. Na peredovyh rubezhah nauki i inzhenernogo tvorchestva* [Herald of UGTU-UPI. At the Frontiers of Science and Engineering], 2004, Ch.1, no. 15 (45), pp. 148–152.
21. Chentsov A.A., Chentsov A.G. On the Implementation of the Dynamic Programming Method in the Generalized Problem of Courier [O realizatsii metoda dinamicheskogo programmirovaniya v obobshchennoy zadache kur'era]. *Trudy Instituta matematiki i mehaniki UrO RAN*, 2007, vol. 13, no. 3, pp. 136–160.
22. Tashlykov O.L., Sesekin A.N., Scheklein S.E., Chentsov A.G. Development of Optimum Algorithms for Decommissioning of Nuclear Power Plants with Using of Mathematical Modelling [Razrabotka optimal'nykh algoritmov vyvoda AES iz ekspluatatsii s ispol'zovaniem metodov matematicheskogo modelirovaniya]. *Izvestiya VUZ. Nuclear Power Engineering*, 2009, no. 2, pp. 115–120.
23. Tashlykov O.L., Sesekin A.N., Scheklein S.E., Balushkin F.A., Chentsov A.G., Homjakov A.P. The Mathematical Modelling Techniques in Solving the Problem of Reducing Personnel Exposure [Vozmozhnosti matematicheskikh metodov modelirovaniya v reshenii problemy snizheniya obluchaemosti personala]. *Voprosy radiatsionnoy bezopasnosti* [Radiation Safety], 2009, no. 4, pp. 39-49.
24. Sesekin A.N., Tashlykov O.L., Scheklein S.E., Kuklin M.Ju., Chentsov A.G., Kadnikov A.A. The Use of Dynamic Programming to Optimize the Path of the Radiation Workers in Hazardous Areas in Order to Optimize Exposure [Ispol'zovanie metoda dinamicheskogo programmirovaniya dlya optimizatsii traektorii peremeshcheniya rabotnikov v radiatsionno opasnykh zonakh s tsel'yu minimizatsii oblucheniya]. *Izvestiya VUZ. Nuclear Power Engineering,* 2006, no. 2, pp. 41–48.
25. Sesekin A.N., Chentsov A.A., Chentsov A.G. *Zadachi marshrutizatsii peremeshcheniy* [Problem of Routing Movements]. St. Petersburg, Lan', 2011. 240 p.
26. Tashlykov O.L. *Organizatsiya i tekhnologiya atomnoy energetiki* [Organization and Technology of Nuclear Energy]. Ekaterinburg, UGTU-UPI, 2005. 148 p.

Поступила в редакцию 6 июля 2012 г.