УДК 517.958+517.988.68

# ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ НЕФТЯНЫХ ПЛАСТОВ

*В.П. Танана, А.В. Боков*

Оценка запасов нефтяного месторождения проводится специалистами геологических служб на основании гидродинамических исследований пластов. Существующие методики направлены на определение гидропроводности нефтеносного пласта и продуктивности скважин по данным их кратковременной эксплуатации. Для обработки результатов измерений используют различные методы, в частности, те, которые основаны на численном решении прямых и обратных задач фильтрации. При решении задачи нахождения коэффициента гидропроводности численными методами необходимо учитывать особенности задач подземной гидромеханики. Эти особенности нужно учитывать при составлении математической модели рассматриваемого процесса и при разработке алгоритмов ее численного решения. Ряд условий позволяет сформулировать задачу определения коэффициента гидропроводности как обратную нелинейную задачу гидродинамики. Существенно важным для решения данной задачи является доказательство единственности ее решения. В данной работе формулируются условия для обратной задачи фильтрации со смешанными граничными условиями, гарантирующие единственность ее решения.

*Ключевые слова: гидродинамические методы исследования скважин, математическая модель, обратная задача фильтрации, единственность решения обратной задачи.*

## Введение

Наиболее эффективными методами исследования нефтяных пластов, получившими широкое распространение на промыслах, являются методы гидродинамического исследования скважин, которые позволяют оценивать продуктивные и фильтрационные параметры пласта (пластовое давление, гидропроводность, проницаемость и т. д.) вблизи исследуемой скважины, а также в удаленной от нее зоне. Исследования проводят как на установившихся режимах (метод снятия индикаторных диаграмм), так и на неустановившихся режимах (метод кривой восстановления давления в эксплуатационных и нагнетательных скважинах, метод кривой восстановления уровней, гидропрослушивание, импульсные методы и др.). Применяемые методы в комплексе позволяют определить качественно и количественно гидродинамическую связь между скважинами и пластами и оценить неоднородность пласта.

Исследование методом кривой восстановления давления заключается в регистрации изменения давления в одиночной скважине, которая была закрыта после кратковременной работы с известным дебитом (дебит – объем нефти, добываемой из скважины за единицу времени) или после установившегося отбора нефти из скважины.

Метод гидропрослушивания заключается в наблюдении за изменением пластового давления или статического уровня в простаивающих (реагирующих) скважинах, происходящим при смене режима работы окружающих эксплуатационных (возмущающих или нагнетательных) скважин, пробуренных на один и тот же пласт. Скорость реагирования скважины в процессе прослушивания пласта зависит от литолого-физических свойств пласта и физико-химических характеристик жидкости.

Существуют различные варианты проведения испытаний в рамках данных методов: однократное и многократное (гармоническое) изменение дебита скважины, сочетание методов кривых восстановления и падения давления (КПД-КВД).

По данным испытаний строятся кривые реагирования, которые затем обрабатываются графоаналитически или другими способами. Существуют несколько десятков методов обработки данных измерений, базирующихся на различных теоретических моделях пластовых фильтрационных систем и, как следствие, основанных на различных дифференциальных уравнениях фильтрации: для многофазных систем, для систем с двойной пористостью и проницаемостью и т.д.

Решение задачи определения коэффициента гидропроводности нефтяного пласта методами гидродинамического исследования скважин требует построения математической модели процесса фильтрации жидкого флюида в пористой среде. Ряд допущений позволяет упростить задачу и свести ее к обратной задаче фильтрации.

## 1. Математическое моделирование процесса гидродинамического исследования

Исходными для обработки данными, которые получаются в результате применения методов гидродинамического исследования скважин, являются:

- график работы скважины (дебит, продолжительность работы на режимах, продолжительность остановок);
- первоначальные и текущие пластовые давления, приведенные к единой отметке (начальному положению поверхности водонефтяного контакта, ВНК);
- продолжительность остановки скважины для замера текущего пластового давления.

Для упрощения задачи наложим ряд ограничений. Будем считать жидкость (нефть) несжимаемой. Физический процесс будем описывать дифференциальным уравнением для однофазной системы.

Тогда испытание в рамках исследуемого метода можно рассматривать как процесс нестационарной фильтрации жидкости к одиночной скважине. Этот процесс в осесимметричном случае описывается уравнением

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho\,\sigma(\rho)\,\frac{\partial p}{\partial \rho}\right], \tag{1}$$

где $p = p(\rho, t)$ – давление в пласте, $\sigma = \sigma(\rho)$ – коэффициент гидропроводности, $t$ – время, $\rho$ – полярный радиус.

Решение уравнения (1), функцию $p(\rho, t)$, ищем в области изменения переменных $(\rho, t)$: $t \geq 0$, $0 < r_0 \leq \rho \leq \bar{r}$.

Сделаем следующие предположения:

а) известно начальное давление в пласте

$$p(\rho, 0) = p_0; \tag{2}$$

б) на границе пласта выполняется условие «непротекания»

$$\frac{\partial p(\bar{r}, t)}{\partial \rho} = 0, \quad t \geq 0; \tag{3}$$

в) известно забойное давление

$$p(r_0, t) = f_1(t), \quad t \geq 0; \tag{4}$$

г) коэффициент гидропроводности $\sigma(\rho)$ удовлетворяет условию

$$\sigma(\rho) \geq d > 0 \text{ при } \rho \in [r_0, \bar{r}]. \tag{5}$$

Задачу (1) – (4) называют прямой задачей фильтрации. При известной функции $\sigma(\rho)$, удовлетворяющей условию (5), и при дополнительных предположениях о гладкости функций $\sigma(\rho)$, $f_1(t)$ и $p(\rho, t)$ эта задача имеет единственное решение.

## 2. Постановка задачи как обратной коэффициентной задачи фильтрации

Обратная задача заключается в определении неизвестного коэффициента $\sigma(\rho)$ в уравнении (1) по дополнительной информации о решении задачи (1) – (4).

Пусть известен дебит скважины

$$\frac{\partial p(r_0, t)}{\partial \rho} = g(t), \tag{6}$$

где $g(t)$ – ограниченная и непрерывная функция, $t \geq 0$.

Так как при неизвестной функции $\sigma(\rho)$ решение $p(\rho, t)$ задачи (1) – (4) также неизвестно, то обратную задачу сформулируем как задачу определения двух функций $\sigma(\rho)$ и $p(\rho, t)$, удовлетворяющих условиям (1) – (6).

Сделав в уравнениях (1) – (6) замену переменной $u(\rho, t) = p(\rho, t) - p_0$, перейдем к новой задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho\, \sigma(\rho)\, \frac{\partial u}{\partial \rho} \right], \tag{7}$$

$$u(\rho, 0) = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial u(\bar{r}, t)}{\partial \rho} = 0, \tag{9}$$

$$u(r_0, t) = f(t), \tag{10}$$

$$\frac{\partial u(r_0, t)}{\partial \rho} = g(t), \tag{11}$$

где $0 < r_0 \leq \rho \leq \bar{r}$, $t \geq 0$, $f(t) = f_1(t) - p_0$.

Будем предполагать, что функция $f(t) \in C^2[0, \infty)$ удовлетворяет условиям

$$f(0) = f'(0) = 0, \; f(t) = 0 \text{ при } t \geq t_0, \; f(t) \not\equiv 0 \text{ при } t \geq 0, \tag{12}$$

а функция $\sigma(\rho)$ удовлетворяет условию (5) и

$$\sigma(\rho) \in C^2[r_0, \bar{r}]. \tag{13}$$

**Определение 1.** *Решением обратной задачи* (7) – (11) *назовем пару функций* $\sigma(\rho)$ *и* $u(\rho, t)$ *таких, что* $u(\rho, t)$ *имеет непрерывные частные производные* $\big(u(\rho, t), u'_\rho(\rho, t), u''_{\rho\rho}(\rho, t), u'_t(\rho, t) \in C\big[(r_0, \bar{r}) \times (0, \infty)\big]\big)$ *и удовлетворяет условиям* (8) – (11), $\sigma(\rho)$ *удовлетворяет условиям* (5) *и* (13), *функции* $\sigma(\rho)$ *и* $u(\rho, t)$ *удовлетворяют уравнению* (7).

## 2.1. Исследование единственности решения соответствующей обратной задачи фильтрации

Поскольку в уравнении (7) не известны ни функция $u(\rho, t)$, ни коэффициент $\sigma(\rho)$, характеризующий гидропроводность пласта, задача становится недоопределенной. Для получения замкнутой системы мы вынуждены использовать дополнительное граничное условие (11). Это в реальных условиях исследования одиночной скважины соответствует регистрации дебита на доступной для измерений границе. Одна из границ оказывается «перегруженной» в плане информации. Все это превращает некорректную задачу в нелинейную.

Некорректность и нелинейность обратной задач осложняют исследование и затрудняют поиск решения. Существенно важным здесь является доказательство единственности решения [1, 2].

Оказывается, для того, чтобы решение задачи (7) – (11) было единственное, достаточно выполнения (12) для функции $f(t) \in C^2[0,\infty)$ и некоторых дополнительных ограничений на само решение, впрочем, совершенно естественных в данной постановке. Приведем необходимые доказательства этого утверждения.

**1. Вспомогательные леммы.**

Пусть $\sigma(\rho)$ и $u(\rho,t)$ – решение обратной задачи (7) – (11) (см. определение 1). Пусть функция $f(t) \in C^2[0,\infty)$ удовлетворяет требованиям (12).

**Лемма 1.** *Если выполнены сформулированные выше условия, то при* $t \to \infty$ $u(\rho,t) \to 0$, $u'_\rho(\rho,t) \to 0$, $u'_t(\rho,t) \to 0$ *и* $\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\sigma(\rho)\frac{\partial u(\rho,t)}{\partial\rho}\right] \to 0$ *равномерно на отрезке* $[r_0, \bar{r}]$ *(см. [2]).*

Введем функцию $V(\rho,s)$, являющуюся преобразованием Лапласа от $u(\rho,t)$ по переменной $t$

$$V(\rho,s) = \int_0^\infty e^{-st} u(\rho,t)\,dt.$$

На основании леммы 1 из (7) – (10) следует, что для значений комплексного параметра $s$ таких, что $Re\, s \geq s_0 > 0$, функция $V(\rho,s)$ является решением краевой задачи

$$\frac{1}{\rho}\left[\rho\sigma(\rho)V'_\rho\right]'_\rho - sV = 0, \tag{14}$$

$$V'_\rho(\bar{r},s) = 0, \tag{15}$$

$$V(r_0,s) = \varphi(s), \tag{16}$$

где $\varphi(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$. Кроме того функция $V(\rho,s)$ удовлетворяет дополнительному условию

$$V'_\rho(r_0,s) = \mu(s), \tag{17}$$

где $\mu(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} g(t)\,dt$.

Рассмотрим функцию $W(\rho,s)$, являющуюся решением задачи Коши для уравнения (14) с краевыми условиями

$$W(\bar{r},s) = 1, \tag{18}$$
$$W'_\rho(\bar{r},s) = 0.$$

Так как функции $V(\rho, s)$ и $W(\rho, s)$ являются решениями дифференциального уравнения (14) и $V'_\rho(\bar r, s) = W'_\rho(\bar r, s)$, то из теоремы [3, с. 179] следует, что они линейно зависимые, то есть

$$V(\rho, s) = C(s)\, W(\rho, s). \tag{19}$$

Тогда из (16) и (19) следует, что

$$\varphi(s) = C(s)\, W(r_0, s), \tag{20}$$

а из (17) и (19) следует, что

$$\mu(s) = C(s)\, W'_\rho(r_0, s). \tag{21}$$

Из последнего равенства можно выразить $C(s)$:

$$C(s) = \frac{\mu(s)}{W'_\rho(r_0, s)}. \tag{22}$$

**Лемма 2.** *При сформулированных выше условиях множество нулей функции $W(r_0, s)$ не пересекается с множеством нулей функции $W'_\rho(r_0, s)$ (см. [2]).*

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-\frac{1}{\rho}\left[\rho\sigma(\rho)\, y'(\rho)\right]' = \lambda\, y(\rho) \tag{23}$$

с краевыми условиями

$$y(r_0) = 0,\ y'(\bar r) = 0 \tag{24}$$

или

$$y'(r_0) = 0,\ y'(\bar r) = 0. \tag{25}$$

**Лемма 3.** *При сформулированных выше условиях значения $s = s_0$ и $s = \bar s_0$ являются, соответственно, нулями функций $W(r_0, s)$ и $W'_\rho(r_0, s)$ тогда и только тогда, когда числа $\lambda_0 = -s_0$ и $\bar\lambda_0 = -\bar s_0$ являются собственными значениями задач Штурма-Лиувилля* (23), (24) *и* (23), (25) *(см. [2]).*

Предположим теперь, что функция $\sigma(\rho) \in C^2[r_0, \bar r]$ удовлетворяет условию (5), и $\sigma'(\bar r) = 0$. Вернемся к решению $W(\rho, s)$ задачи Коши для уравнения (14) с начальными условиями (18).

**Лемма 4.** *При сформулированных выше ограничениях на $\sigma(\rho)$ функции $W(\rho, s)$ и $W'_\rho(\rho, s)$ для каждого фиксированного $\rho \in [r_0, \bar r]$ являются целыми функциями комплексного параметра $s$ (см. [2]).*

Так как функция $W(\rho, s)$ представляет собой решение уравнения (14) с условиями (18), то из леммы 4 следует, что $W(\rho, s)$ и $W'_\rho(\rho, s)$ при фиксированном $\rho$ являются аналитическими функциями комплексного переменного $s$ во всей комплексной плоскости.

**2. Основная теорема.**

В дальнейшем всюду будем предполагать, что $\sigma(\rho) \in C^2[r_0, \bar r]$, $\sigma'(\bar r) = 0$ и выполняется условие (5).

Пусть $\sigma_i(\rho)$ и $u_i(\rho, t)$ $(i = 1, 2)$ – решения обратной задачи (7) – (11). Обозначим через $V_i(\rho, s)$ преобразование Лапласа от $u_i(\rho, t)$, а через $W_i(\rho, s)$ – решения задачи Коши для уравнения (14) с $\sigma(\rho) = \sigma_i(\rho)$ и начальными условиями (18). Для краткости $(W_i(\rho, s))'_\rho\,|_{\rho=r_0}$ будем обозначать $W'_i(r_0, s)$.

Из (10) следует, что $V_1(r_0,s) = V_2(r_0,s)$. Тогда, используя формулы (19) и (22), получим, что при $Re\, s \geq s_0 > 0$

$$\frac{W_1(r_0,s)}{W_1'(r_0,s)} = \frac{W_2(r_0,s)}{W_2'(r_0,s)}. \tag{26}$$

Из леммы 4 следует, что функции $W_i(r_0,s)/W_i'(r_0,s)$ при $i = 1,2$ являются аналитическими функциями комплексного переменного $s$ во всей комплексной плоскости за исключением нулей $W_i'(r_0,s)$, являющихся особыми точками.

Из (26) следует, что нули и особые точки функций $W_1(r_0,s)/W_1'(r_0,s)$ и $W_2(r_0,s)/W_2'(r_0,s)$ совпадают.

Используя лемму 2, окончательно получим, что все нули функций $W_1(r_0,s)$ и $W_2(r_0,s)$ совпадают, и все нули функций $W_1'(r_0,s)$ и $W_2'(r_0,s)$ также совпадают.

Таким образом, на основании леммы 3 для любого $n$ выполняются соотношения

$$\lambda_n^1 = \lambda_n^2 \tag{27}$$

и

$$\bar{\lambda}_n^1 = \bar{\lambda}_n^2, \tag{28}$$

где $\{\lambda_n^i\}$ при $i = 1,2$ – все собственные значения (23) – (24) задачи Штурма-Лиувилля [5] с $\sigma(\rho) = \sigma_i(\rho)$, упорядоченные по возрастанию, а $\{\bar{\lambda}_n^i\}$ – все собственные значения задачи (23), (25) с $\sigma(\rho) = \sigma_i(\rho)$, также упорядоченные по возрастанию.

**Теорема 1.** *Предположим, что функция $f(t)$ удовлетворяет условиям (12). Тогда, если $\sigma_i(\rho)$ и $u_i(\rho,t)$, $i = 1,2$ – решения обратной задачи (7)-(11) такие, что $\sigma_1'(\bar{r}) = \sigma_2'(\bar{r}) = \sigma_1'(r_0) = \sigma_2'(r_0) = 0$, $\int_{r_0}^{\bar{r}} \frac{d\xi}{\sqrt{\sigma_1(\xi)}} = \int_{r_0}^{\bar{r}} \frac{d\xi}{\sqrt{\sigma_2(\xi)}}$, а также $\sigma_1(r_0) = \sigma_2(r_0) = \sigma_1(\bar{r}) = \sigma_2(\bar{r})$, и значение $\sigma(r_0)$ нам известно, то $\sigma_1(\rho) = \sigma_2(\rho)$ для $\rho \in [r_0,\bar{r}]$ и $u_1(\rho,t) = u_2(\rho,t)$ для $\rho \in [r_0,\bar{r}], t \geq 0$*

*Доказательство.* Применяя в уравнении (23) преобразование Лиувилля ([4], с.35)

$$x = \frac{1}{c}\int_{r_0}^{\rho} \frac{d\xi}{\sqrt{\sigma(\xi)}}, \tag{29}$$

где $x$ – новая независимая переменная,

$$c = \frac{1}{\pi}\int_{r_0}^{\bar{r}} \frac{d\xi}{\sqrt{\sigma(\xi)}}, \tag{30}$$

и делая замену

$$z(\rho) = \sqrt{\rho}\,\sigma^{\frac{1}{4}}(\rho)\,y(\rho), \tag{31}$$

перейдем от функции $y_i(\rho,\lambda)$ к функции $z_i(x,\lambda)$, удовлетворяющей уравнению

$$-\frac{\partial^2 z_i}{\partial x^2} + q_i(x)\,z_i = c^2\lambda\, z_i,\ 0 \leq x \leq \pi,\ i = 1,2. \tag{32}$$

В этом уравнении функции $q_i(x) = -a_i(x)$, непрерывные на отрезке $[0,\pi]$, определяются формулами (29), (30) и

$$a_i(x) = -\frac{1}{\theta_i(x)}\frac{d^2\theta_i(x)}{dx^2}, \tag{33}$$

$$\theta_i(\rho) = \sqrt{\rho}\,\sigma_i^{\frac{1}{4}}(\rho). \tag{34}$$

Здесь функции $\theta_i = \theta_i(x)$ также определены параметрически равенствами (29) и (30).

Сделав еще одну замену

$$w_i(\tau,\lambda) = z_i(\pi-\tau,\lambda),\ \tau = \pi - x,\ 0 \le \tau \le \pi,\ i = 1,2,$$

получим уравнение для функции $w_i(\tau,\lambda)$

$$-\frac{\partial^2 w_i}{\partial \tau^2} + q_i(\pi-\tau)\, w_i = c^2\lambda\, w_i,\ 0 \le \tau \le \pi,\ i = 1,2. \tag{35}$$

Теперь преобразуем граничные условия (24) и (25). Получим, что условиям (24) соответствует пара граничных условий

$$w_i(\pi,\lambda) = 0,\ i = 1,2, \tag{36}$$

$$w_i(0,\lambda)\cos\beta - w_i'(0,\lambda)\sin\beta = 0,\ i = 1,2, \tag{37}$$

где $\beta = \arcsin\left(1 \Big/ \sqrt{1+\left(\frac{c}{2\bar r}\right)^2\sigma(\bar r)}\right)$ и $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Условиям (25) соответствуют граничные условия (37) и

$$w_i(\pi,\lambda)\cos\gamma - w_i'(\pi,\lambda)\sin\gamma = 0,\ i = 1,2, \tag{38}$$

где $\gamma = \arcsin\left(1 \Bigg/ \sqrt{1+\left(\frac{c}{2r_0}\right)^2\sigma(r_0)}\right)$ и $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, задача Штурма-Лиувилля (35) – (37) порождает возрастающую последовательность собственных значений $\{\mu_n^i\}$. При этом из формулы (27) и условий теоремы следует, что для любого $n$

$$\mu_n^1 = \mu_n^2. \tag{39}$$

Аналогично, задача Штурма-Лиувилля (35), (37) и (38) порождает возрастающую последовательность собственных значений $\{\bar\mu_n^i\}$ такую, что на основании (28) и условий теоремы следует, что для любого $n$

$$\bar\mu_n^1 = \bar\mu_n^2. \tag{40}$$

Из теоремы, приведенной в [6], и равенств (39) и (40) следует, что для любого $x \in [0,\pi]$

$$a_1(x) = a_2(x). \tag{41}$$

Таким образом, обозначив $a_i(x)$ через $a(x)$ и воспользовавшись формулами (33), (34), получим, что

$$\frac{d^2\theta_i(x)}{d\,x^2} + a(x)\,\theta_i(x) = 0,\ i = 1,2, \tag{42}$$

где

$$\theta_i(0) = \sqrt{r_0}\,\sigma_i^{\frac{1}{4}}(r_0) \tag{43}$$

и

$$\theta_i'(0) = \frac{c}{2\sqrt{r_0}}\,\sigma_i^{\frac{3}{4}}(r_0). \tag{44}$$

Задача Коши (42) – (44) для линейного дифференциального уравнения второго порядка имеет единственное решение, и, следовательно,

$$\theta_1(x) = \theta_2(x).$$

Используя формулу (34), получаем, что

$$\sigma_1(\rho) = \sigma_2(\rho) \text{ при } \rho \in [r_0, \bar{r}].$$

Но тогда и решения прямой задачи (7) – (10) при соответствующих ограничениях на функции $u_i(\rho, t)$ и $f(t)$ будут при любых значениях $\rho \in [r_0, \bar{r}]$ и $t \geq 0$ удовлетворять условиям

$$u_1(\rho, t) = u_2(\rho, t),$$

что и доказывает теорему.

□

## Литература


1. Танана, В.П. О единственности решения обратной задачи нестационарной фильтрации / В.П. Танана, А.В. Боков. – Деп. в ВИНИТИ 1996. – №1290-В96.
2. Боков, А.В. О единственности решения обратной задачи нестационарной фильтрации / А.В. Боков // Вестник ЮУрГУ. Серия «Вычислительная математика и информатика». – 2012. – №47(306), вып. 2. – С. 12–21.
3. Степанов, В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М.: ГТТИ, 1938. – 376 с.
4. Мартыненко, Н.А. Конечные интегральные преобразования и их применение к исследованию систем с распределенными параметрами / Н.А. Мартыненко, Л.М. Пустыльников. – М.: Наука, 1986. – 304 с.
5. Левитан, Б.М. Введение в спектральную теорию / Б.М. Левитан, И.С. Саргосян. – М.: Наука, 1970. – 672 с.
6. Levinson, N. The Inverse Sturm–Liouville Problem / N. Levinson // Math. Tidsskr. Ser. B. – 1949. – V. 13. – P. 25–30.



Виталий Павлович Танана, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «Вычислительная математика», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), tvpa@susu.ac.ru.

Александр Викторович Боков, кафедра «Вычислительная математика», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), bokov@susu.ac.ru.



**Bulletin of the South Ural State University.**
**Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»,**
**2013, vol. 6, no. 3, pp. 95–103.**

**MSC 35Q35, 47J06**


## Features of Mathematical Modelling of Hydrodynamic Research of Oil Layers


***V.P. Tanana,*** South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, tvpa@susu.ac.ru,
***A.V. Bokov,*** South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, bokov@susu.ac.ru

The oil field reserves estimation is carried out by experts of geological services in terms of hydrodynamic researches of oil layers. Existing techniques are aimed at determining the hydraulic conductivity of oil-bearing layer and well productivity according to their short-term operation. Different methods are used for processing the results of measurement, in particular those based on the numerical solution of direct and inverse filtering. In solving the problem of determining the coefficient of hydraulic conductivity using numerical methods we should take into account the features of underground fluid mechanics. These features should be considered when we work out a mathematical model of the process and during the development of algorithms for its numerical solution. A number of conditions can specify the problem of determining the coefficient of hydraulic conductivity as the inverse problem of nonlinear hydrodynamics. The essential part for solving this problem is to prove the uniqueness of the solution. In this paper, we state the conditions for the inverse filtering with mixed boundary conditions that guarantee the uniqueness of the solution.

*Keywords: hydrodynamic methods of research of wells, mathematical model, inverse problem of filtration, uniqueness of the solution of the inverse problem.*

## References

1. Tanana V.P., Bokov A.V. About the Only Solution of Inverse Problems of Unsteady Filtration [O edinstvennosti resheniya obratnoy zadachi nestatsionarnoy fil'tratsii]. *Rukopis' deponirovana v VINITI*, 1996, no. 1290-B96.

2. Bokov, A.V. About the Only Solution of Inverse Problems of Unsteady Filtration [O edinstvennosti resheniya obratnoy zadachi nestatsionarnoy fil'tratsii]. *Bulletin of the South Ural State University. Series ≪Computational Mathematics and Software Engineering≫*, 2012, no. 47 (306), issue 2, pp. 12–21.

3. Stepanov V.V. *Kurs differentsialnykh uravneniy* [Course on Differential Equations]. Moscow, GTTI, 1938. 376 p.

4. Martynenko N.A., Pustyl'nikov L.M. *Konechnye integral'nye preobrazovanija i ih primenenie k issledovaniju sistem s raspredelennymi parametrami* [Finite Integral Transformations and their Application to the Study of Systems with Distributed Parameter]. Moscow, Nauka, 1986. 304 p.

5. Levitan, B.M., Sargosyan I.S. *Vvedenie v spektral'nuyu teoriyu* [Introduction to Spectral Theory]. Moscow, Nauka, 1970. 672 p.

6. Levinson, N. The Inverse Sturm-Liouville Problem. *Math. Tidsskr. Ser. B.,*1949, vol. 13, pp. 25–30.

*Поступила в редакцию 11 апреля 2013 г.*