

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛОСЫ С НАРУЖНЫМ МАКРОДЕФЕКТОМ

*А.И. Носачева*

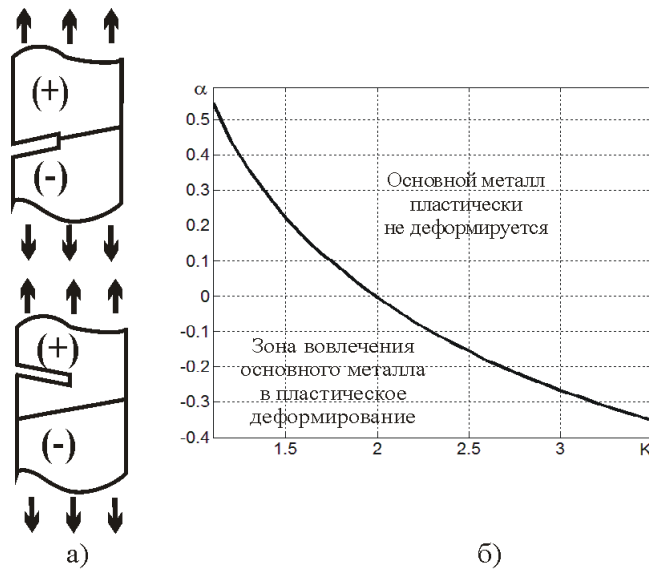
Аналитическими и численными методами исследуется напряженное состояние дискретно неоднородной полосы с наружным макродефектом. На этой основе получен и реализован алгоритм нахождения критической растягивающей нагрузки в зависимости от размеров и расположения дефекта, угла наклона контактной поверхности и коэффициента механической неоднородности.

*Ключевые слова:* математическое моделирование, напряженное состояние, неоднородное соединение, дефект.

### Введение

Измерение распределений напряжений в неоднородных образцах и конструкциях с осложненной геометрией, в том числе при наличии дефектов, вызывает в натурных экспериментах труднопреодолимые сложности. В то же время среднеинтегральные по нетто-сечениям напряжения легко находятся через измерения критических нагрузок. Определение местных напряжений опосредовано, на основе измерения деформаций, основывается на теории малых деформаций, неприменимой к упрочняемым, то есть реальным, материалам. С другой стороны, знание распределения напряжений в различных частях конструкций необходимо для оценки несущей способности этих конструкций. Поэтому актуально теоретическое, на основе разработки адекватных математических моделей, исследование напряженного состояния этих конструкций. Возникающие в этих моделях граничные задачи для нелинейных уравнений в частных производных требуют для их изучения разработки соответствующих аналитических и численных методов. В работе рассматривается напряженное состояние неоднородной полосы с наружным макродефектом в более прочной части или на границе между более прочным и менее прочным участками под растягивающей нагрузкой (см. рис. 1, а). Граница между более прочной и менее прочной частью (контактная граница), как часто бывает в реальных сварных соединениях, не предполагается ортогональной направлению нагрузки. Более прочная часть испытывает в процессе пластического деформирования ослабляющее влияние менее прочной части. Изучение напряженного состояния таких неоднородных соединений необходимо для определения прочностных свойств реальных сварных соединений, содержащих наклонные контактные границы и дефекты различной формы и расположения [1–4]. Краевая задача для системы уравнений гиперболического типа (при плоской деформации) относительно компонент тензора напряжений, моделирующая напряженное состояние на более прочном участке, оказывается переопределенной [5, 6], следствием чего является разрывность ее решения и негладкость характеристик. Линии разрыва напряжений определяются формой границы и граничными условиями [5, 6]. Цель работы – на основе численного решения [7] задачи сопряжения для напряжений на контактной границе и исследования полей характеристик описать напряженное состояние неоднородной полосы с наружным макродефектом и, как следствие, получить алгоритмы и программы для нахождения критической нагрузки в зависимости от параметров соединения: размеров и расположения дефекта, угла наклона контактной границы и коэффициента

механической неоднородности соединения. Заметим также, что решение [7] задачи сопряжения для напряжений на контактной границе позволило установить критерий вовлечения более прочной части соединения в пластическое деформирование в зависимости от угла контактной поверхности и коэффициента контактного упрочнения (рис. 1, б).



**Рис. 1.** а) Варианты расположения дефекта. б) Критерий вовлечения более прочной части соединения (основной металл) в пластическое деформирование в зависимости от угла наклона контактной поверхности  $\alpha$  и коэффициента  $K$  контактного упрочнения

Уравнения равновесия для напряжений на контактной поверхности в безразмерных координатах имеют вид:

$$\sigma_{y'}^- = K\sigma_{y'}^+; \quad \tau_{x'y'}^- = K\tau_{x'y'}^+; \quad K = k^+/k^-, \quad (1)$$

где  $k^+$  и  $k^-$  – параметры пластичности более прочного и менее прочного участков соответственно. Здесь  $(x'; y')$  – декартовы координаты с осью  $Ox'$ , направленной вдоль контактной границы. Будем называть уравнения (1) *условиями сопряжения*. Задача сопряжения [7] для напряжений на контактной границе формулируется так:

*на основе граничных условий и заданных на контактной поверхности условий сопряжения (1) для напряжений найти напряжения  $\sigma_{y'}^\pm$  и  $\tau_{x'y'}^\pm$  на контактной поверхности.*

В работе [6] установлен количественный критерий вовлечения материала более прочного участка в процесс пластического деформирования. В частности, показано, что если угол наклона контактной поверхности к направлению, ортогональному направлению нагрузки, равен нулю, то более прочный материал начинает течь при  $K < 2$ . В общем случае метод основан на ограниченности угла  $\omega^-$  поворота характеристик в менее прочной части величиной  $\pi/4 - \alpha$ . С увеличением внешней нагрузки угол  $\omega^-$  возрастает от нуля до тех пор, пока выполняется неравенство

$$\omega^- < \frac{\pi}{4} - \alpha,$$

либо в какой-то момент более прочный материал перейдет в пластическое состояние, и рост угла  $\omega^-$  прекратится. Углы поворота характеристик  $\omega^-$  и  $\omega^+$  связаны с напряжениями на контактной поверхности уравнениями

$$\sigma_y^+ = 1 - 2\omega^+ + \cos 2\omega^+, \quad \sigma_y^- = 1 + 2\omega^- + \cos 2\omega^-.$$

Используя условия сопряжения (1), эти уравнения и представляя неизвестные функции  $\omega^-$  и  $\omega^+$  в виде степенного ряда по параметру  $\lambda = K - 1$ :

$$\omega^- = \sum \omega_k^- \lambda^k, \quad \omega^+ = \sum \omega_k^+ \lambda^k,$$

получим решением трансцендентной системы уравнений [7] аналитические выражения для вычисления углов  $\omega^-$  и  $\omega^+$ . Эти выражения имеют в общем случае (когда  $\alpha \neq 0$ ) громоздкий вид:

$$\omega^- = \frac{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{4 \cos 2\alpha} \lambda + \frac{1}{8} \left( \frac{1}{\cos 2\alpha} + 1 \right) \frac{\sin^2 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos^2 2\alpha} \lambda^2 + \dots$$

$$\omega^+ = \frac{1 + \cos 2\alpha - \sin 2\alpha}{4 \cos 2\alpha} \lambda + \left[ \frac{1}{4} \tan 2\alpha - \frac{1}{8} \left( \frac{1}{\cos 2\alpha} + 1 \right) \left( \frac{1 - \sin 2\alpha}{\cos^2 2\alpha} + 1 \right) \right] \lambda^2 + \dots$$

В работе [7] разработан алгоритм численного решения упомянутой системы методом итераций. Написанная на его основе в среде MATLAB программа позволяет вычислять значения нормальных и касательных напряжений на контактной границе в зависимости от параметров  $\alpha$  и  $K$  в критический момент нагружения (т.е. в момент начала течения при-контактной зоны более прочного участка соединения).

Наклон контактной поверхности и расположение относительно этой поверхности дефекта приводят к большому разнообразию распределения напряжений по нетто-сечению (рис. 2). Сложность исследования напряженного состояния такого соединения обусловлена также разрывностью напряжений в более прочной части [6] (на рис. 2 пунктиром показана линия разрыва нормальных напряжений). Различие ситуаций определяется расстоянием  $g$  между точками выхода на свободную поверхность контактной поверхности и нетто-сечения, точнее зависимостью  $g$  от параметров  $m$ ,  $\alpha$ ,  $\omega^-$  и  $\omega^+$ . На рис. 2 а показана одна из наиболее сложных ситуаций, когда нетто-сечение пересекает контактную границу, и на эпюру напряжений по нетто-сечению влияют искажения полей характеристик как в более прочной, так и в менее прочной части, возникшие в результате взаимного воздействия этих частей под нагрузкой в критический момент нагружения. Здесь эпюра напряжений может иметь шесть участков, на которых величина напряжения определяется различными зависимостями (см. рис. 2 а). Длина каждого участка зависит от соотношения между величинами  $g$ ,  $m$ ,  $\alpha$ ,  $\omega^-$  и  $\omega^+$ . Углы  $\omega^-$  и  $\omega^+$  зависят, в свою очередь, от угла  $\alpha$  и коэффициента контактного упрочнения  $K$ . На основе этих соотношений и алгоритмов работ [6, 7] написана программа для вычисления среднего критического напряжения в данной ситуации.

На рис. 2 б показан другой сложный случай, при котором нетто-сечение не пересекает контактную границу. В этом случае на эпюру напряжений по нетто-сечению влияют искажения полей характеристик в более прочной части, возникшие в результате воздействия менее прочной части под нагрузкой в критический момент нагружения, и расстояния  $g$  между точками выхода на свободную поверхность контактной поверхности и нетто-сечения. Анализ полей характеристик (линии скольжения, см. рис. 2) показывает, что возможны три подслучая, определяемые зависимостями между параметрами  $g$ ,  $m$ ,  $\alpha$  и  $\omega^+$ :

$$g \geq \frac{m(1 - \tan \alpha)(1 + \frac{\omega^+}{2})}{3 + \tan \alpha + \frac{\omega^+}{2}(1 - \tan \alpha)}, \quad (2)$$

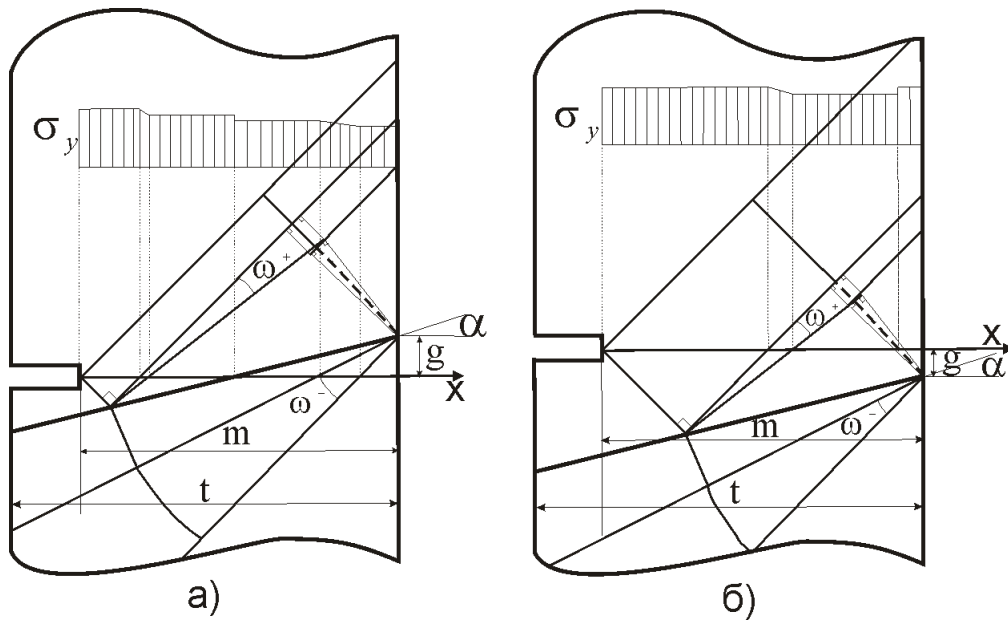


Рис. 2. Поле характеристик и эпюры напряжений

$$\frac{m(1 - \frac{\omega^+}{2} - \tan \alpha(1 + \frac{3}{2}\omega^+))}{3 - \frac{\omega^+}{2} + \tan \alpha(1 - \frac{3}{2}\omega^+)} \leq g \leq \frac{m(1 - \tan \alpha)(1 + \frac{\omega^+}{2})}{3 + \tan \alpha + \frac{\omega^+}{2}(1 - \tan \alpha)}, \quad (3)$$

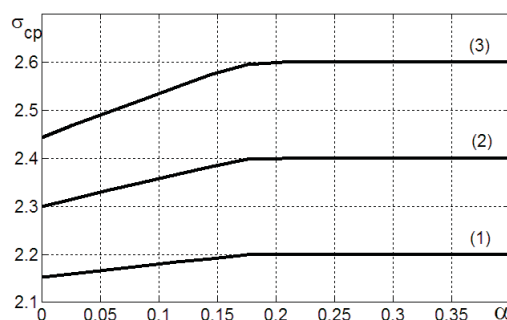
$$g \leq \frac{m(1 - \frac{\omega^+}{2} - \tan \alpha(1 + \frac{3}{2}\omega^+))}{3 - \frac{\omega^+}{2} + \tan \alpha(1 - \frac{3}{2}\omega^+)}. \quad (4)$$

Случай (4) приводит к ситуации, соответствующей рисунку 2, б). В каждом из случаев (2) – (4) эпюра напряжений по нетто-сечению имеет несколько участков, размеры которых и напряжения на них определяются несложными, но очень громоздкими вычислениями, которые здесь не приводятся. На их основе и алгоритме работы [6] описан и реализован в программе алгоритм для вычисления среднего критического напряжения в ситуациях (2) – (4). Полученные результаты для наружного дефекта глубины  $0,1t$ , расположенном на расстоянии  $g = 0,2t$  ( $t$  – толщина полосы) от контактной поверхности, представлены на рис. 3.

Если  $\alpha = 0$ , то возможно в некоторых ситуациях получение среднего критического напряжения в аналитической форме [6].

## Литература

1. Dil'man, V.L. Static Strength of Mechanically Nonuniform Welded Joints with a One-Sided Surface Defect Subject to Ductile Failure / V.L. Dil'man, A.A Ostsemin // Chemical and Petroleum Engineering. – 2005. – V. 41, № 9–10. – P. 522–529.
2. Dil'man, V.L. Effect of Defects on the Load Carrying Capacity of Pipes of Transmission Oil and Gas Pipelines under Biaxial Loading / V.L. Dil'man, A.A Ostsemin // Welding International. – 2006. – V. 20, № 1. – P. 63–67.
3. Dil'man, V.L. Analysis of the Ductile Strength of Welds Weakened by Notches in Longitudinally Welded Pipes of Large Diameter by the Method of Slip Lines / V.L. Dil'man, A.A Ostsemin // Strength of Materials. – 2004. – V. 36, № 3. – P. 274–282.



**Рис. 3.** Среднее значение критических напряжений в зависимости от угла наклона контактной поверхности для соединения с наружным дефектом в более прочной части для различных коэффициентов механической неоднородности: 1)  $K=1,1$ ; 2)  $K=1,2$ ; 3)  $K=1,3$

4. Дильман, В.Л. Влияние дефектов сварки, расположенных на границе сплавления, на прочность сварного соединения / В.Л. Дильман // Вестник машиностроения. – 2006. – № 2. – С. 21–26.
5. Дильман, В.Л. Анализ напряженного состояния неоднородной полосы с дефектом в более прочной части / В.Л. Дильман // Обзорение прикл. и пром. математики. – 2008. – Т. 15, вып. 3. – С. 463–464.
6. Dilman, V.L. Stress State and Strength of an Inhomogeneous Plastic Strip with a Defect in a Stronger Part / V.L. Dilman // Mechanics of Solids. – 2010. – V. 45, № 2. – P. 227–236.
7. Дильман, В.Л. Анализ напряженно-деформированного состояния неоднородной пластической полосы / В.Л. Дильман, А.И. Носачева // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 40 (299), вып. 14. – С. 164–168.

Алия Исламовна Носачева, ассистент, кафедра математического анализа, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), dilman49@mail.ru.

Bulletin of the South Ural State University.  
Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»,  
2013, vol. 6, no. 3, pp. 79–84.

MSC 35L72, 74C05

## Mathematical Modelling a Stress State of Inhomogeneous Band with External Macrodefect

*A.I. Nosacheva*, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, dilman49@mail.ru

Analytical and numerical methods are applied to examine the stress state of discrete inhomogeneous band with macrodefect. On this basis the algorithm of finding a critical tensile load is received and realized depending on the size and the defect arrangement, the tilt angle of contact surface and the coefficient of mechanical heterogeneity.

*Keywords:* mathematical modeling, tension, non-uniform connection, defect.

## References

1. Dil'man V.L., Ostsemin A.A. Static Strength of Mechanically Nonuniform Welded Joints with a One-Sided Surface Defect Subject to Ductile Failure. *Chemical and Petroleum Engineering*, 2005, vol. 41, no. 9–10, pp. 522–529.
2. Dil'man V.L., Ostsemin A.A. Effect of Defects on the Load Carrying Capacity of Pipes of Transmission Oil and Gas Pipelines under Biaxial Loading. *Welding International*, 2006, vol. 20, no. 1, pp. 63–67.
3. Dil'man V.L., Ostsemin A.A. Analysis of the Ductile Strength of Welds Weakened by Notches in Longitudinally Welded Pipes of Large Diameter by the Method of Slip Lines. *Strength of Materials*, 2004, vol. 36, no. 3, pp. 274–282.
4. Dil'man V.L. Influence of Welding Defects Located on the Boundary Alloying on Weld Strength [Vliyanie defektov svarki, raspolozhennih na granice splavleniya, na prochnost' svarnogo soedineniya]. *Vestnik mashinostroeniya*, 2006, no. 2, pp. 21–26.
5. Dil'man V.L. Analysis of the Stress State of the Inhomogeneous Band with a Defect in a Stronger Part [Analiz napryazhennogo sostoyaniya neodnorodnoj polosi s defektom v bolee prochnoj chasti]. *Obozrenie prikladnoj i promishlennoj matematiki*, 2008, vol. 15, no. 3, pp. 463–464.
6. Dilman V.L. Stress State and Strength of an Inhomogeneous Plastic Strip with a Defect in a Stronger Part. *Mechanics of Solids*, 2010, vol. 45, no. 2, pp. 227–236.
7. Dil'man V.L., Nosacheva A.I. The Numerical Analysis of Tensions on the Inclined Contact Surface at Stretching of Discrete-Heterogeneous Solid [Analiz napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya neodnorodnoj plasticheskoy polosi]. *Bulletin of the South Ural State University. Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»*, 2012, no. 40 (299), issue 14, pp. 164–168.

Поступила в редакцию 25 мая 2013 г.