УДК 517.9

ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

М.В. Фалалеев

В работе методами теории фундаментальных оператор-функций и теории полугрупп операторв с ядрами исследована задача Коши для интегро-дифференциального уравнения соболевского типа в банаховых пространствах. Построена фундаментальная оператор-функция, с помощью которой получена конструктивная формула для обобщенного решения в классе распределений с ограниченным слева носителем. Описаны условия совпадения классического и обобщенного решений. Абстрактные результаты проиллюстрированы на примерах задач Коши–Дирихле из математической теории вязкоупругости.

Ключевые слова: банаховы пространства; обобщенные функции; вязкоупругость.

Введение

Некоторые колебательные процессы в вязкоупругих средах моделируются начально-краевыми задачами для неклассических интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с необратимым оператором при старшей по времени производной. Редукция таких задач к вырожденным интегро-дифференциальным уравнениям в банаховых пространствах позволяет исследовать их в наиболее общей постановке с единых методологических позиций. Таковыми в данной работе являются теория фундаментальных оператор-функций [1] и теория полугрупп операторов с ядрами [2]. Целью предлагаемой работы является через комбинирование основных идей этих двух подходов получить общие теоремы о разрешимости в классах распределений задачи Коши

$$Bu^{(N)}(t) = Au(t) + \int\limits_0^t g(t-s)Bu(s)ds + f(t), \tag{1}$$

$$u(0) = u_0,\ u^{'}(0) = u_1,\ \ldots,\ u^{(N-1)}(0) = u_{N-1}, \tag{2}$$

где $B \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, $A \in \mathcal{C}l(E_1, E_2)$, B необратим, E_1, E_2 — банаховы пространства $g(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. На этой основе можно получить полное представление о структуре обобщенного решения и сформулировать утверждения о гладких решениях задачи (1), (2), что в свою очередь позволяет всесторонне исследовать некоторые задачи теории вязкоупругости.

1. Построение обобщенного решения

В обобщенных функциях [1] задача (1), (2) переписывается в виде

$$\begin{aligned}\left(B\left(\delta^{(N)}(t) - g(t)\theta(t)\right) - A\delta(t)\right) * \tilde{u}(t) = \\ = f(t)\theta(t) + Bu_{N-1}\delta(t) + Bu_{N-2}\delta^{'}(t) + \ldots + Bu_0\delta^{(N-1)}(t).\end{aligned} \tag{3}$$

В классе $K_+^{'}(E_1)$ обобщенных функций с ограниченным слева носителем единственным решением уравнения (3) является функция

$$\tilde{u}(t) = \mathcal{E}_N(t) * (f(t)\theta(t) + Bu_{N-1}\delta(t) + Bu_{N-2}\delta^{'}(t) + \ldots + Bu_0\delta^{(N-1)}(t)). \tag{4}$$

Здесь $\mathcal{E}_N(t)$ — фундаментальная оператор-функция [1] интегро-дифференциального оператора $\mathcal{L}_N(\delta(t)) = B\left(\delta^{(N)}(t) - g(t)\theta(t)\right) - A\delta(t)$, удовлетворяющая следующей паре уравнений

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) * v(t) = v(t), \forall\ v(t) \in K_+^{'}(E_2),$$

$$\mathcal{E}_N(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) * w(t) = w(t), \forall\ w(t) \in K_+^{'}(E_1).$$

Пусть оператор A спектрально ограничен относительно оператора B (или (B,σ)-ограничен) [2], т.е. вне некоторого круга радиуса a непрерывно обратим оператор $(\mu B - A)$. Тогда проекторы

$$P = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}(\mu B - A)^{-1}B d\mu : E_1 \to E_1,\ \ Q = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}B(\mu B - A)^{-1}d\mu : E_2 \to E_2,$$

$\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C} :\ |\mu| = r > a\}$, порождают разложения пространств в прямые суммы $E_1 = E_1^0 \oplus E_1^1 = N(P) \oplus R(P)$ и $E_2 = E_2^0 \oplus E_2^1 = N(Q) \oplus R(Q)$. Действия операторов A и B расщепляются таким образом, что непрерывно обратимы $A_0 :\ E_1^0 \to E_2^0$ и $B_1 :\ E_1^1 \to E_2^1$, ограничен $A_1 : E_1^1 \to E_2^1$, $QB = BP$ и $QA = AP$. Отсюда естественным образом вытекают вспомогательные тождества

$$BB_1^{-1}Q = Q,\ AA_0^{-1}(I - Q) = I - Q,\ \left(A_1B_1^{-1}\right)^k BP = \left(A_1B_1^{-1}\right)^{k-1} A_1P,$$

$$A\left(A_0^{-1}B_0\right)^k A_0(I - Q) = B_0\left(A_0^{-1}B_0\right)^{k-1} A_0(I - Q),\ k \geq 1.$$

В дальнейшем изложении потребуется следующая вспомогательная лемма из [3]

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{R}(t)$ — резольвента ядра $k(t) = \frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t) * g(t)\theta(t)$, тогда в сверточной алгебре $\mathcal{D}'_+$ справедливы равенства*

$$\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t) * \Big(\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t)\Big) * \Big(\delta^{(N)}(t) - g(t)\theta(t)\Big) = \delta(t),$$

$$\frac{t^{(k+1)N-1}}{((k+1)N-1)!}\theta(t) * \Big(\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t)\Big)^{k+1} * \Big(\delta^{(N)}(t) - g(t)\theta(t)\Big) =$$

$$= \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t) * \Big(\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t)\Big)^k,\ \ k \geq 1,$$

здесь под степенью обобщенной функции понимается ее кратная свертка с собой, нулевая степень обобщенной функции есть $\delta(t)$.

В введенных здесь обобзначениях сформулируем следующую

Теорема 1. *Пусть оператор A спектрально ограничен относительно B, тогда интегро-дифференциальный оператор $\mathcal{L}_N(\delta(t))$ имеет фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}_N(t) = B_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t) * \Big(\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t)\Big)^k \left(A_1B_1^{-1}\right)^{k-1} Q -$$

$$- \sum_{q=0}^{+\infty}\left(A_0^{-1}B_0\right)^q A_0^{-1}(I - Q)\Big(\delta^{(N)}(t) - g(t)\theta(t)\Big)^q. \quad (5)$$

Доказательство. В соответствии с определением фундаментальной оператор-функции проверим справедливость следующих двух сверточных равенств

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) = I_2\delta(t), \;\; \mathcal{E}_N(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) = I_1\delta(t),$$

где I_1, I_2 — тождественные операторы банаховых пространств E_1 и E_2 соответственно. Справедлива следующая цепочка равенств

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) = BB_1^{-1}\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t) * \left(\delta^{(N)}(t) - g(t)\theta(t)\right) * \left(\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t)\right)Q+$$

$$+BB_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^{(k+1)N-1}}{((k+1)N-1)!}\theta(t) * \left(\delta^{(N)}(t) - g(t)\theta(t)\right) * \left(\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t)\right)^{k+1}\left(A_1B_1^{-1}\right)^k Q-$$

$$-B\sum_{q=0}^{+\infty}\left(A_0^{-1}B_0\right)^q A_0^{-1}(I-Q)\left(\delta^{(N)}(t) - g(t)\theta(t)\right)^{q+1} -$$

$$-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t) * \left(\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t)\right)^k\left(A_1B_1^{-1}\right)^k Q+$$

$$+AA_0^{-1}(I-Q)\delta(t) + A\sum_{q=0}^{+\infty}\left(A_0^{-1}B_0\right)^{q+1}A_0^{-1}(I-Q)\left(\delta^{(N)}(t) - g(t)\theta(t)\right)^{q+1}.$$

Отсюда в соответствии со вспомогательными тождествами и леммой получаем

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) = Q\delta(t) + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t) * \left(\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t)\right)^k\left(A_1B_1^{-1}\right)^k Q-$$

$$-B_0\sum_{q=0}^{+\infty}\left(A_0^{-1}B_0\right)^q A_0^{-1}(I-Q)\left(\delta^{(N)}(t) - g(t)\theta(t)\right)^{q+1} -$$

$$-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t) * \left(\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t)\right)^k\left(A_1B_1^{-1}\right)^k Q+$$

$$+(I-Q)\delta(t) + B_0\sum_{q=0}^{+\infty}\left(A_0^{-1}B_0\right)^q A_0^{-1}(I-Q)\left(\delta^{(N)}(t) - g(t)\theta(t)\right)^{q+1} =$$

$$= Q\delta(t) + (I-Q)\delta(t) = I\delta(t).$$

Аналогично доказывается второе равенство

$$\mathcal{E}_N(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) = B_1^{-1}QB\delta(t) + B_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t) * \left(\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t)\right)^k\left(A_1B_1^{-1}\right)^k QB-$$

$$-\sum_{q=0}^{+\infty}\left(A_0^{-1}B_0\right)^q A_0^{-1}(I-Q)B\left(\delta^{(N)}(t) - g(t)\theta(t)\right)^{q+1} -$$

$$-B_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t) * \left(\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t)\right)^k\left(A_1B_1^{-1}\right)^{k-1} QA+$$

$$+A_0^{-1}(I-Q)A\delta(t)+\sum_{q=0}^{+\infty}\left(A_0^{-1}B_0\right)^{q+1}A_0^{-1}(I-Q)A\left(\delta^{(N)}(t)-g(t)\theta(t)\right)^{q+1}.$$

Поскольку

$$B_1^{-1}QB=B_1^{-1}BP=P,\ \left(A_1B_1^{-1}\right)^kQB=\left(A_1B_1^{-1}\right)^kBP=\left(A_1B_1^{-1}\right)^{k-1}A_1P,$$

$$\left(A_1B_1^{-1}\right)^{k-1}QA=\left(A_1B_1^{-1}\right)^{k-1}A_1P,\ \ A_0^{-1}(I-Q)A=A_0^{-1}A_0(I-P)=I-P,$$

тогда

$$\mathcal{E}_N(t)*\mathcal{L}_N(\delta(t))=P\delta(t)+(I-P)\delta(t)=I\delta(t).$$

□

Замечание 1. Если бесконечность является устранимой особой точкой [2] для $(\mu B-A)^{-1}$ (B-резольвенты оператора A), т.е. $A_0^{-1}B_0\equiv 0$, то представление (5) для фундаментальной оператор-функции $\mathcal{E}_N(t)$ имеет следующий наиболее простой вид

$$\tilde{\mathcal{E}}_N(t)=B_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)*\left(\delta(t)+\mathcal{R}(t)\theta(t)\right)^k\left(A_1B_1^{-1}\right)^{k-1}Q-A_0^{-1}(I-Q)\delta(t).$$

Замечание 2. Если в условиях теоремы 1 бесконечность является устранимой особой точкой для $(\mu B-A)^{-1}$, то обобщенное решение (4) задачи (1), (2) является регулярной обобщенной функцией и имеет вид

$$\tilde{u}(t)=B_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)*\left(\delta(t)+\mathcal{R}(t)\theta(t)\right)^k*\left(A_1B_1^{-1}\right)^{k-1}Qf(t)\theta(t)-A_0^{-1}(I-Q)f(t)\theta(t)$$
$$+\sum_{j=0}^{N-1}B_1^{-1}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^{kN-1-j}}{(kN-1-j)!}\theta(t)*\left(\delta(t)+\mathcal{R}(t)\theta(t)\right)^k*\left(A_1B_1^{-1}\right)^{k-1}QBu_{N-1-j}\delta(t). \quad (6)$$

Далее из формулы (6) прямыми вычислениями находим

$$\frac{d^j}{dt^j}\tilde{u}(t)\bigg|_{t=0}=-A_0^{-1}(I-Q)f^{(j)}(0)+B_1^{-1}QBu_j=Pu_j-A_0^{-1}(I-Q)f^{(j)}(0).$$

Поскольку функция $\tilde{u}(t)$ удовлетворяет уравнению (1), то потребовав выполнения условий $\tilde{u}^{(j)}(0)=u_j$, получим

Теорема 2. *Пусть оператор A спектрально ограничен относительно B, бесконечность является устранимой особой точкой для B-резольвенты оператора A, $f(t)$ — достаточно гладкая, то задача Коши (1), (2) имеет единственное решение класса $C_+^N(t\geq 0,E_1)$ вида (6), если выполнены условия*

$$(I-Q)\left(Au_j+f^{(j)}(0)\right)=0,\quad j=0,1,\ldots,N-1.$$

2. Приложения

Рассмотрим две начально-краевые задачи теории вязкоупругости [4].

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$(\lambda-\Delta)\,u_t-\Delta u-\int\limits_0^t g(t-s)\,(\alpha-\Delta)\,u(s,\bar{x})ds=f(t,\bar{x}), \quad (7)$$

в котором $u = u(t, \bar{x})$ — искомая функция, $\bar{x} \in \Omega \subset R^m$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Будем искать функцию $u = u(t, \bar{x})$, определенную на цилиндре $R_+ \times \Omega$ и удовлетворяющую начально-краевым условиям

$$u\Big|_{t=0} = u_0(\bar{x}), \ \ \bar{x} \in \Omega, \ \ u\Big|_{\bar{x}\in\partial\Omega} = 0, \ \ t \geq 0. \tag{8}$$

Задача Коши–Дирихле (7), (8) редуцируется к задаче Коши (1), (2) если положить $\alpha = \lambda$, пространства E_1 и E_2 выбрать как соболевские

$$E_1 \equiv \left\{ v(\bar{x} \in W_2^2(\Omega) : \ v\Big|_{\partial\Omega} = 0) \right\}, \ \ E_2 \equiv W_2(\Omega), \tag{9}$$

операторы A и B определить формулами

$$B = \lambda - \Delta, \quad A = \Delta, \quad \lambda \in \sigma(B). \tag{10}$$

В этом случае оператор A является спектрально ограничен относительно B, и бесконечность является устранимой особой точкой B-резольвенты оператора A. В соответствии с теоремой 2 получаем следующую

Теорема 3. *Пусть для задачи Коши–Дирихле (7), (8) пространства E_1 и E_2 определены как в (9), операторы A и B как в (10), то существует единственное решение $u(t, \bar{x}) \in C^1(t \geq 0, E_1)$ задачи (7), (8) если начально-краевые условия (8) удовлетворяют соотношениям*

$$(\lambda u_0(\bar{x}) + f(0, \bar{x}), \varphi_i(\bar{x})) = 0,$$

здесь $\varphi_i(\bar{x})$ собственные функции оператора Лапласа, соответствующие собственному значению $\lambda \in \sigma(B)$.

Пример 2. Для уравнения

$$(\lambda - \Delta)\, u_{tt} - \beta\Delta u_t - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\,(\alpha - \Delta)\, u(s, \bar{x}) ds = f(t, \bar{x}), \tag{11}$$

с начально-краевыми условиями

$$u\Big|_{t=0} = u_0(\bar{x}), \ \ u_t\Big|_{t=0} = u_1(\bar{x}), \ \ \bar{x} \in \Omega, \ \ u\Big|_{\bar{x}\in\partial\Omega} = 0, \ \ t \geq 0, \tag{12}$$

положим $\beta = 0, \ \alpha = \lambda$, пространства E_1 и E_2 выбрем как в (9), операторы A и B как в (10), тогда справедлива

Теорема 4. *Если для задачи Коши-Дирихле (11), (12), $\beta = 0$, пространства E_1 и E_2 и операторы A и B выбрать как в (9) и (10), то задача Коши-Дирихле однозначно разрешима в классе $C^2(t \geq 0, E_1)$, если начально-краевые условия (12) удовлетворяют соотношениям*

$$(\lambda u_0(\bar{x}) + f(0, \bar{x}), \varphi_i(\bar{x})) = 0,$$

$$(\lambda u_1(\bar{x}) + f_t(0, \bar{x}), \varphi_i(\bar{x})) = 0,$$

здесь $\varphi_i(\bar{x})$ те же, что в теореме 3.

Замечание 3. Представленные здесь результаты допускают обобщение на случаи секториальной и радиальной ограниченности [5] операторного пучка $(\mu B - A)^{-1}$.

Работа проводилась при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России»на 2009–2013 годы, госконтракт № 14.B37.21.0365

Литература

1. Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn and M. Falaleev. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002.

2. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // УМН. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47–74.

3. Фалалеев, М.В. Интегро-дифференциальные уравнения с фредгольмовым оператором при старшей производной в банаховых пространствах и их приложения / М.В. Фалалеев // Известия Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – Иркутск, 2012. – Т. 5, № 2. – С. 90–102.

4. Cavalcanti, M.M. Existence and Uniform Decay for a Non-Linear Viscoelastic Equation with Strong Damping / M.M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti, J. Ferreira // Math. Meth. Appl. Sci. – 2001. – V. 24. – P. 1043–1053.

5. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.

Михаил Валентинович Фалалеев, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «Математического анализа и дифференциальных уравнений», Иркутский государственный университет (г. Иркутск, Российская Федерация), mihail@ic.isu.ru.

Bulletin of the South Ural State University.
Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»,
2013, vol. 6, no. 4, pp. 101–107.

MSC 34G10

Linear Models in Theory of Viscoelasticity of Sobolev Type

M. V. Falaleev, Irkutsk State University, Irkutsk, Russian Federation, mihail@ic.isu.ru

In this paper the Cauchy problem for integral differential equation in Banach spaces of a Sobolev type is analyzed by the methods of fundamental operator-functions theory and the theory of operator semigroups with kernels. Fundamental operator-function is constructed and with its help constructive formulae for generalized solution in class of distributions with left-bounded support are obtained. Equal conditions for generalized and classical solutions are described. Abstract results are illustrated by Cauchy–Dirichle problems arised in mathematical theory of viscoelasticity.

Keywords: Banach spaces; generalized functions; viscoelasticity.

References

1. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M. *Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications.* Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 2002.

2. Sviridyuk G.A. On the General Theory of Operator Semigroups [K obshchey teorii polugrupp operatorov]. *Russ. Math. Surv.,* 1994, vol. 49, no. 4, pp. 47–74.

3. Falaleev M.V. Integro-Differential Equations with Fredholm Operator by the Derivative of the Higest Order in Banach Spaces and It's Applications [Integro-differentsialnyye uravneniya s fredgolmovym operatorom pri starshey proizvodnoy v banakhovykh prostranstvakh i ikh prilozheniya]. *J. News of Irkutsk State University. Series ≪Mathematics≫*, Irkutsk, 2012, vol. 5, no. 2, pp. 90–102.

4. Cavalcanti M.M., Domingos Cavalcanti V.N., Ferreira J. Existence and Uniform Decay for a Non-Linear Viscoelastic Equation with Strong Damping. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2001, vol. 24, pp. 1043–1053.

5. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators.* Utrecht, Boston, Köln, Tokyo, VSP, 2003.

Поступила в редакцию 10 сентября 2013 г.