УДК 517.518

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ СЛАБО-НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

М.А. Перепелица, А.А. Покутный

В работе рассматриваются системы дифференциально-алгебраических уравнений с выделенной линейной частью и малым нелинейным слагаемым. Такие уравнения ниже называются слабо-нелинейными. Матрицы коэффициентов линейной части могут быть прямоугольными. Дополнительно предполагается, что решение удовлетворяет краевым условиям достаточно общего вида. Основным предположением относительно линейной части является возможность приведения ее к некоторому каноническому виду, введеного в работах В.Ф. Чистякова. Применяя специальную технику, исследование исходной краевой задачи сводится к изучению оператора, который при достаточно малом значении параметра, при нелинейном члене является сжимающим. В рамках сделанных исходных предположений получены необходимые и достаточные условия существования решений слабо-нелинейных дифференциально-алгебраических систем.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраические уравнения; индекс; неявный; слабо нелинейный.

Огромное количество прикладных задач радиофизики, теории управления, математической экономики моделируется системами дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производной. При исследовании таких систем важную роль играло понятие центральной канонической формы, представленное в [1] (см. также [2]). Несмотря на то, что теория для систем таких уравнений развивается и исследуется около 40 лет, терминология для них не является устоявшейся. В ходу такие названия, как «алгебро-дифференциальные системы» или «дифференциально-алгебраические», «сингулярные» или «вырожденные системы», «дескрипторные системы» [3 – 9]. В работе [10] было введено понятие обобщенной канонической формы для дифференциально-алгебраических систем с прямоугольной матрицей при производной не постоянного ранга. В данной статье, с использованием этой формы, исследуются слабо-нелинейные дифференциально-алгебраические системы.

Рассмотрим слабо нелинейную систему вида

$$L_1x = A(t)\dot{x}(t,\varepsilon) + B(t)x(t,\varepsilon) = f(t) + \varepsilon Z(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon), t \in T = [a,b], \tag{1}$$

с краевым условием

$$Kx(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \tag{2}$$

где $A(t), B(t)$ – $(m \times n)$ – матрицы, $x(t,\varepsilon), f(t)$ – искомая и заданная вектор-функции соответственно; K – линейный $(p \times n)$ вектор-функционал, α – p-мерный вектор, $Z(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon), J(x(t,\varepsilon),\varepsilon)$ – нелинейные вектор-функции, непрерывные по совокупности переменных соответствующего размера. Дальнейшие условия на нелинейности будут уточнены. Предполагается, что входные данные достаточно гладкие, и выполняется условие

$$rank\ A(t) < min\{m,n\}, t \in T. \tag{3}$$

В дальнейшем будем предполагать в соответствии с [10], что существуют квадратные матрицы $P(t), Q(t) \in C^l(T), l \geq 1$ подходящего размера со свойством $detP(t)detQ(t) \neq 0$, которые заменой $x(t) = Q(t)z(t)$ и умножения на матрицу $P(t)$ слева приводят систему (1) к виду

$$P(t)A(t)Q(t)\dot{z}(t,\varepsilon) + [P(t)A(t)\dot{Q}(t) + P(t)B(t)Q(t)]z(t,\varepsilon) = \tag{4}$$

$$= \begin{pmatrix} E_d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L^*(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0_{m_3\times n_3} \end{pmatrix} \dot{z}(t,\varepsilon)+$$

$$+ \begin{pmatrix} J(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{d_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M^*(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0_{m_3\times n_3} \end{pmatrix} z(t,\varepsilon) =$$

$$= P(t)f(t) + \varepsilon P(t)Z(Q(t)z(t,\varepsilon),t,\varepsilon),$$

с краевым условием

$$KQ(\cdot)z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(Q(\cdot)z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{5}$$

Ищется такое решение задачи (4), (5), которое при $\varepsilon = 0$ обращается в одно из решений порождающей краевой задачи

$$\begin{pmatrix} E_d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L^*(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0_{m_3\times n_3} \end{pmatrix} \dot{z}_0(t)+$$

$$+ \begin{pmatrix} J(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{d_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M^*(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0_{m_3\times n_3} \end{pmatrix} z_0(t) = P(t)f(t), \tag{6}$$

$$KQ(\cdot)z_0(\cdot) = \alpha. \tag{7}$$

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

При выполнении условий теоремы 1 [10], система (6) будет иметь ν- параметрическое семейство решений вида

$$z_0(t,c) = X_\nu(t)c + \overline{z}([P(\cdot)f(\cdot)])(t),\ t\in T,$$

где

$$\overline{z}([P(\cdot)f(\cdot)])(t) = X_1(t)\mathcal{C}^-\theta + \int_a^t K_1(t,s)P(s)f(s)ds + \sum_{j=0}^{l-1} C_j(t)(d/dt)^j P(t)f(t)+$$

$$+\tilde{C}(t)w(t) + \int_a^t K_2(t,s)w(s)ds,$$

здесь обозначения в правой части равенства такие же, как и в [10].

Подставляя в краевое условие (7), приходим к матричной системе

$$Bc = g, \tag{8}$$

где

$$B = KQ(\cdot)X_\nu(\cdot) - (p \times \nu) - \text{ мерная матрица}, \quad g = \alpha - KQ(\cdot)\overline{z}([P(\cdot)f(\cdot)])(\cdot).$$

Система (8) разрешима [11] тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{P}_{B_d^*} g = 0, \tag{9}$$

и множество решений имеет вид

$$c = B^+ g + \mathcal{P}_{B_r} c_r, c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Здесь $\mathcal{P}_{B_r}, \mathcal{P}_{B_d^*}$ – проекторы на ядро и коядро матрицы B, составленной из линейно-независимых векторов [12]. Тогда множество решений порождающей краевой задачи (6), (7) может быть представлено в виде

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + X_\nu(t)B^+\alpha + (G[P(\cdot)f(\cdot)])(t), \tag{10}$$

где $X_r(t) = X_\nu(t)\mathcal{P}_{B_r}$,

$$(G[P(\cdot)f(\cdot)])(t) = \overline{z}([P(\cdot)f(\cdot)])(t) - X_\nu(t)B^+KQ(\cdot)\overline{z}([P(\cdot)f(\cdot)])(\cdot)$$

– обобщенный оператор Грина.

Найдем теперь необходимые условия существования решений слабонелинейной краевой задачи (4), (5). Предположим, что существует решение $z(t, \varepsilon)$, которое при $\varepsilon = 0$ обращается в одно из решений $z_0(t, c_r)$ порождающей краевой задачи (6), (7).Будем предполагать, что нелинейности в (1), (2) непрерывны в окрестности порождающего решения $x_0(t, c_r) = Q(t)z_0(t, c_r)$. Тогда должно выполняться условие разрешимости

$$\mathcal{P}_{B_d^*}(\alpha + \varepsilon J(Q(\cdot)z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - KQ(\cdot)\overline{z}([P(\cdot)f(\cdot) + \varepsilon Z(Q(\cdot)z(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)])(\cdot)) = 0, \tag{11}$$

из которого в силу (9) и перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$ получаем матричную систему уравнений для порождающих вектор-констант

$$F(c_r) = \mathcal{P}_{B_d^*}(J(Q(\cdot)z_0(\cdot, c_r), 0) - KQ(\cdot)\overline{z}([Z(Q(\cdot)z_0(\cdot, c_r), \cdot, 0)])(\cdot)) = 0. \tag{12}$$

Таким образом мы доказали утверждение.

Теорема 1 (необходимое условие). *Пусть краевая задача (4), (5) имеет решение $z(t, \varepsilon)$, которое при $\varepsilon = 0$ обращается в порождающее решение $z_0(t, c_r)$ (10) с вектором $c_r = c_r^0$. Тогда вектор-констант c_r^0 должен удовлетворять матричному уравнению (12) для порождающих вектор-констант.*

Для получения достаточного условия существования решения выполним замену переменных в краевой задаче (4), (5) вида

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r^0) + y(t, \varepsilon),$$

в которой $z_0(t, c_r^0)$ – порождающее решение краевой задачи (6), (7) с вектором c_r^0, который удовлетворяет матричному уравнению для порождающих вектор-констант (12). Будем дополнительно предполагать, чтобы нелинейности Z и J были дифференцируемы в окрестности порождающего решения $x_0(t, c_r) = Q(t)z_0(t, c_r)$. В новых переменных будем искать решение краевой задачи

$$P(t)A(t)Q(t)\dot{y}(t, \varepsilon) + [P(t)A(t)\dot{Q}(t) + P(t)B(t)Q(t)]y(t, \varepsilon) =$$
$$= \varepsilon P(t)Z(Q(t)(z_0(t, c_r^0) + y(t, \varepsilon)), t, \varepsilon), \tag{13}$$

$$KQ(\cdot)y(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon J(Q(\cdot)(z_0(\cdot,c_r^0) + y(\cdot,\varepsilon)),\varepsilon), \tag{14}$$

которое при $\varepsilon = 0$ обращается в нулевое решение. Разрешимость краевой задачи (4), (5) эквивалентна разрешимости краевой задачи (13), (14). Используя непрерывную дифференцируемость нелинейностей в окрестности порождающего решения, выделим линейную часть по y и члены нулевого порядка по ε:

$$Z(Q(t)(z_0(t,c_r^0) + y(t,\varepsilon)),t,\varepsilon) = Z(Q(t)z_0(t,c_r^0),t,0) + A_1(t)Q(t)y(t,\varepsilon) + \mathcal{R}(Q(t)y(t,\varepsilon),t,\varepsilon),$$

$$J(Q(\cdot)(z_0(\cdot,c_r^0,\varepsilon) + y(\cdot,\varepsilon)) = J(Q(\cdot)z_0(\cdot,c_r^0),0) + lQ(\cdot)y(\cdot,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(Q(\cdot)y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon),$$

где

$$A_1(t) = A_1(t,c_r^0) = Z_y^{(1)}(v,t,\varepsilon)|_{v=Q(t)z_0(t,c_r^0),\varepsilon=0}, l = J^1(v,\varepsilon)|_{v=Q(t)z_0(t,c_r),\varepsilon=0}$$

– производные Фреше в точке $(v = Q(t)z_0(t,c_r^0),\varepsilon = 0)$, а для членов более высокого порядка $\mathcal{R}(y,t,\varepsilon),\mathcal{R}_1(y,\varepsilon)$ выполнены соотношения

$$\mathcal{R}(0,t,0) = 0,\mathcal{R}_y^{(1)}(0,t,0) = 0, \quad \mathcal{R}_1(0,0) = 0,\mathcal{R}_{1\ y}^{(1)}(0,0) = 0.$$

Таким образом, учитывая замену, будем рассматривать краевую задачу

$$P(t)A(t)Q(t)\dot{y}(t,\varepsilon) + [P(t)A(t)\dot{Q}(t) + P(t)B(t)Q(t)]y(t,\varepsilon) = \tag{15}$$

$$= \varepsilon\{P(t)Z(Q(t)z_0(t,c_r^0),t,0) + P(t)A_1(t)Q(t)y(t,\varepsilon) + P(t)\mathcal{R}(Q(t)y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\},$$

$$KQ(\cdot)y(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\{J(Q(\cdot)z_0(\cdot,c_r^0),0) + lQ(\cdot)y(\cdot,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(Q(\cdot)y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}, \tag{16}$$

которая имеет решения в виде

$$y(t,\varepsilon) = X_r(t)c_r + \overline{y}(t,\varepsilon), c_r \in \mathbb{R}^r, \tag{17}$$

$$\overline{y}(t,\varepsilon) = \varepsilon X_\nu(t)B^+\{J(Q(\cdot)z_0(\cdot,c_r^0),0) + lQ(\cdot)y(\cdot,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(Q(\cdot)y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}+ \tag{18}$$

$$+\varepsilon(G[P(\cdot)Z(Q(\cdot)z_0(\cdot,c_r^0),\cdot,0) + P(\cdot)A_1(\cdot)Q(\cdot)y(\cdot,\varepsilon) + P(\cdot)\mathcal{R}(Q(\cdot)y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)])(t),$$

при выполнении условия

$$\mathcal{P}_{B_d^*}\{J(Q(\cdot)z_0(\cdot,c_r^0),0) + lQ(\cdot)y(\cdot,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(Q(\cdot)y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-KQ(\cdot)\overline{z}([P(\cdot)Z(Q(\cdot)z_0(\cdot,c_r^0),\cdot,0) + P(\cdot)A_1(\cdot)Q(\cdot)y(\cdot,\varepsilon) + P(\cdot)\mathcal{R}(Q(\cdot)y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)])(\cdot)\} = 0.$$

Используя (12) и подставляя в линейную часть последнего выражения представление (17), получим матричное уравнение относительно $c_r \in \mathbb{R}^r$:

$$B_0c_r = \mathcal{P}_{B_d^*}\{KQ(\cdot)(\overline{z}[P(\cdot)\mathcal{R}(Q(\cdot)y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon) + P(\cdot)A_1(\cdot)Q(\cdot)\overline{y}(\cdot,\varepsilon)])(\cdot)- \tag{19}$$

$$-(lQ(\cdot)\overline{y}(\cdot,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(Q(\cdot)y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon))\},$$

где

$$B_0 = \mathcal{P}_{B_d^*}\{lQ(\cdot)X_r(\cdot) - KQ(\cdot)\overline{z}([P(\cdot)A_1(\cdot)Q(\cdot)X_r(\cdot)])(\cdot)\}.$$

Для разрешимости (19) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\mathcal{P}_{B_0^*}\mathcal{P}_{B_d^*}\{KQ(\cdot)(\overline{z}[P(\cdot)\mathcal{R}(Q(\cdot)y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon) + P(\cdot)A_1(\cdot)Q(\cdot)\overline{y}(\cdot,\varepsilon)])(\cdot)-$$

$$-(lQ(\cdot)\overline{y}(\cdot,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(Q(\cdot)y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon))\} = 0,$$

которое будет заведомо выполняться, если $\mathcal{P}_{B_0^*}\mathcal{P}_{B_d^*}=0$. Решив (19) относительно c_r, приходим к следующей матрично-операторной системе

$$
\begin{gathered}
y(t,\varepsilon)=X_r(t)c_r+\overline{y}(t,\varepsilon),\\
c_r=B_0^+\mathcal{P}_{B_d^*}\{KQ(\cdot)(\overline{z}[P(\cdot)\mathcal{R}(Q(\cdot)y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)+P(\cdot)A_1(\cdot)Q(\cdot)\overline{y}(\cdot,\varepsilon)])(\cdot)-\\
-(lQ(\cdot)\overline{y}(\cdot,\varepsilon)+\mathcal{R}_1(Q(\cdot)y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon))\}, \qquad (20)\\
\overline{y}(t,\varepsilon)=\varepsilon X_\nu(t)B^+\{J(Q(\cdot)z_0(\cdot,c_r^0),0)+lQ(\cdot)y(\cdot,\varepsilon)+\mathcal{R}_1(Q(\cdot)y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}+\\
+\varepsilon(G[P(\cdot)Z(Q(\cdot)z_0(\cdot,c_r^0),\cdot,0)+P(\cdot)A_1(\cdot)Q(\cdot)y(\cdot,\varepsilon)+P(\cdot)\mathcal{R}(Q(\cdot)y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)])(t).
\end{gathered}
$$

Введем вспомогательный вектор $u=(y,c_r,\overline{y})^t\in C^1(T)\times\mathbb{R}^r\times C^1(T)$ (t - обозначает операцию транспонирования). Тогда систему (20) запишем в виде

$$
u=\begin{bmatrix} 0 & X_r(t) & I\\ 0 & 0 & L_1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}u+\begin{pmatrix}0\\ g_1\\ g_2\end{pmatrix},
$$

где

$$
\begin{gathered}
L_1c_r=B_0^+\mathcal{P}_{B_d^*}\{KQ(\cdot)(\overline{z}[P(\cdot)A_1(\cdot)Q(\cdot)\overline{y}(\cdot,\varepsilon)])(\cdot)-lQ(\cdot)\overline{y}(\cdot),\varepsilon)\},\\
g_1=B_0^+\mathcal{P}_{B_d^*}\{KQ(\cdot)(\overline{z}[P(\cdot)\mathcal{R}(Q(\cdot)y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)])(\cdot)+\mathcal{R}_1(Q(\cdot)y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\},\\
g_2=\varepsilon X_\nu(t)B^+\{J(Q(\cdot)(z_0(\cdot,c_r^0)+y(\cdot,\varepsilon)),\varepsilon)+\varepsilon(G[P(\cdot)Z(Q(\cdot)(z_0(\cdot,c_r^0)+y(\cdot,\varepsilon)),\cdot,\varepsilon)])(t)\}.
\end{gathered}
$$

В свою очередь, матричная система (20) эквивалентна следующей

$$
Lu=g, \qquad (21)
$$

где

$$
L=\begin{bmatrix} I & -X_r(t) & -I\\ 0 & I & -L_1\\ 0 & 0 & I\end{bmatrix},\quad g=\begin{pmatrix}0\\ g_1\\ g_2\end{pmatrix}.
$$

Оператор L имеет ограниченный обратный L^{-1}. Действительно, оператор L^{-1} может быть явно выписан в виде

$$
L^{-1}=\begin{bmatrix} I & -X_r(t) & -X_r(t)L_1+I\\ 0 & I & L_1\\ 0 & 0 & I\end{bmatrix}.
$$

То, что так определенный оператор удовлетворяет равенству $LL^{-1}=L^{-1}L=I$, проверяется непосредственной подстановкой. Ограниченность доказывается, как и в [13]. Система (21) тогда может быть записана в виде

$$
u=L^{-1}S(\varepsilon)u.
$$

Для достаточно малого ε оператор $S(\varepsilon)$ будет сжимающим. Тогда из принципа сжимающих отображений будет следовать, что матричная система (21) имеет единственную неподвижную точку, которая и дает решение краевой задачи (15), (16). Таким образом, нами установлено следующее утверждение.

Теорема 2 (достаточное условие). *Пусть для оператора B_0 выполняется следующее условие:*

(i) $\mathcal{P}_{B_0^*}\mathcal{P}_{B_d^*}=0$.

Тогда для произвольного вектора $c = c_r^0 \in \mathbb{R}^r$, удовлетворяющего матричному уравнению для порождающих констант (12), существует по крайней мере одно решение краевой задачи (1), (2). Это решение может быть найдено с помощью итерационного процесса (типа Ньютона-Канторовича) с квадратичной скоростью сходимости

$$\overline{y}_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon X_\nu(t) B^+\{J(Q(\cdot)z_0(\cdot,c_r^0),0) + lQ(\cdot)y_k(\cdot,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(Q(\cdot)y_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}+$$

$$+\varepsilon(G[P(\cdot)Z(Q(\cdot)z_0(\cdot,c_r^0),\cdot,0) + P(\cdot)A_1(\cdot)Q(\cdot)y_k(\cdot,\varepsilon) + P(\cdot)\mathcal{R}(Q(\cdot)y_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)])(t),$$

$$c_r^k = B_0^+\mathcal{P}_{B_d^*}\{KQ(\cdot)(\overline{z}[P(\cdot)\mathcal{R}(Q(\cdot)y_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon) + P(\cdot)A_1(\cdot)Q(\cdot)\overline{y}_k(\cdot,\varepsilon)])(\cdot)-$$

$$-(lQ(\cdot)\overline{y}_k(\cdot,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(Q(\cdot)y_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon))\},$$

$$y_{k+1}(t,\varepsilon) = X_r(t)c_r^k + \overline{y}_k(t,\varepsilon),$$

$$x_k(t,\varepsilon) = Q(t)z_0(t,c_r^0) + Q(t)y_k(t,\varepsilon), k = 0,1,2,...; y_0(t,\varepsilon) = \overline{y}_0(t,\varepsilon) = 0, c_r^0 = 0;$$

$$x(t,\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} x_k(t,\varepsilon).$$

Замечание. Отметим, что условие (i) выполняется, например, в том случае, когда $rank B_0 = d$.

Приведем простейшие примеры того, каким может быть вектор-функционал K, задающий краевые условия (2). При $Kx(\cdot,\varepsilon) = x(b) - x(a) = 0$, он задает периодическое условие. Если $Kx(\cdot,\varepsilon) = Mx(a) + Nx(b) = \alpha$, с $p \times n$ матрицами M и N, то получаем двухточечную краевую задачу.

Литература

1. Campbell, S.L. Canonical Forms and Solvable Singular Systems of Differential Equations / S.L. Campbell, L.R. Petzold // SIAM J. Alg. Discrete Methods. – 1983. – № 4. – P. 517–521.

2. Samoilenko, A.M. On the Reducibility of a Singular Linear System to Central Canonical Form / A.M. Samoilenko, V.P. Yakovets // Dokl. Akad. Nauk Ukrainy. – 1993. – № 4. – P. 10–15.

3. Численные методы решения сингулярных систем / Ю.Е. Бояринцев, В.А.Данилов, А.А. Логинов, В.Ф. Чистяков. – Новосибирск: Наука, 1989.

4. Бояринцев, Ю.Е. Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования / Ю.Е. Бояринцев, В.Ф. Чистяков. – Новосибирск: Наука, 1998.

5. Самойленко, А.М. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями / А.М. Самойленко, М.І. Шкіль, В.П. Яковець. – Киев: Вища школа, 2000.

6. Чистяков, В.Ф. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем / В.Ф. Чистяков, А.А. Щеглова. – Новосибирск: Наука, 2003.

7. Kunkel, P. Differential-Algebraic Equations: Analysis and Numerical Solution / P. Kunkel, V. Mehrmann. – European Mathematical Society, 2006.

8. Жук С.М. Замкнутость и нормальная разрешимость оператора, порожденного линейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами // Нелинейные колебания. – 2007. – Т. 10, № 4. – С. 464–479.

9. Boichuk, A.A. Singular Fredholm boundary value problems / A.A. Boichuk, L.M. Shegda // Nelin. Koliv. – 2007. – V. 10, №3. – P. 303–312.

10. Бойчук, А.А. О применении теории возмущений к исследованию разрешимости дифференциально-алгебраических уравнений / А.А. Бойчук, А.А. Покутный, В.Ф. Чистяков // Журнал вычислительной математики и математической физики // 2013. – Т. 53, № 6. – С. 958 – 969.
11. Boichuk, A.A. Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary-Value Problems/A.A. Boichuk, A.M. Samoilenko. – Utrecht; Boston: VSP, 2004.
12. Boichuk, A.A. Bifurcation of Solutions of Singular Fredholm Boundary Value Problems / A.A. Boichuk, L.M. Shegda // Differential equations. – 2011. – V. 47, № 4. – P. 459–467.
13. Pokutnyi, A.A. Bounded solutions of linear and weakly nonlinear differential equations in a Banach space with unbounded operator in the linear part/ A.A. Pokutnyi // Differential equations. – 2012. – V. 48, № 6. – P. 803–813.

Максим Александрович Перепелица, студент, факультет «Механико-математический», Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко (г. Киев, Украина), chbeeb23@mail.ru.

Александр Алексеевич Покутный, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, отдел «Дифференциальные уравнения и теория колебаний», Институт математики НАН (г. Киев, Украина), lenasas@ukr.net.

Bulletin of the South Ural State University.
Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»,
2013, vol. 6, no. 4, pp. 55–62.

MSC 65L80

Analysis of Solvability for Weak Nonlinear Differential Algebraic Systems

M.A. Perepelitsa, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kiev, Ukraine, lenasas@ukr.net,
A.A. Pokutnyi, Institute of Mathematics NAS, Kiev, Ukraine, chbeeb23@mail.ru

In this paper we consider the system of differential algebraic equations with a linear part and a small nonlinear term. We refer to such systems as weak nonlinear. Coefficient matrices of the linear part might be rectangular. Additionally, it is assumed that the solution meets some boundary conditions of a general kind. Basic assumption for the linear part is that it can be reduced to canonic form introduced by V.F. Chistyakov. By applying a special technique, analysis of the boundary problem is reduced to mastering of an operator which becomes a compression at a sufficiently small parameter. Under assumptions mentioned, we obtain sufficient and necessary existence conditions for weak nonlinear differential algebraic systems.

Keywords: differential algebraic equations; index; implicit; weakly nonlinear.

References

1. Campbell S.L., Petzold L.R. Canonical Forms and Solvable Singular Systems of Differential Equations. *SIAM J. Alg. Discrete Methods,* 1983, no. 4, pp. 517–521.
2. Samoilenko A.M., Yakovets V.P. On the Reducibility of a Singular Linear System to Central Canonical Form. *Dokl. Akad. Nauk Ukrainy,* 1993, no. 4, pp. 10–15.

3. Bojarintsev Yu. Ye., Danilov V.A., Loginov A.A., Chistyakov V.F. *Chislennyye metody resheniya singulyarnykh sistem* [Numerical Methods for Solving Singular Systems]. Novosibirsk, Nauka, 1989.
4. Bojarintsev Yu. Ye., Chistyakov V.F. *Algebro-differentsialnyye sistemy. Metody resheniya i issledovaniya* [Algebro-Differential Systems. Methods for Solution and Investigation]. Novosibirsk, Siberian Publishing House Nauka, 1998.
5. Samoilenko A.M., Shkil M.I., Yakovets V.P. *Lineynye sistemy differentsial'nykh uravneniy s vyrozhdeniyami* [Linear Systems of Differential Equations with Singularities]. Kiev, Vishca Scola, 2000.
6. Chistyakov V.F., Shcheglova A.A. *Izbrannyye glavy teorii algebro-differentsialnykh sistem* [Selected Chapters of Theory of Algebro-Differential Systems]. Novosibirsk. Siberian Publishing House Nauka, 2003.
7. Kunkel P., Mehrmann V. *Differential-Algebraic Equations: Analysis and Numerical Solution.* European Mathematical Society, 2006.
8. Zhuk S.M. *Zamknutost i normalnaya razreshimost operatora, porozhdennogo lineynym differentsialnym uravneniyem s peremennymi koeffitsiyentami* [Closedness and Normal Solvability of the Operator Generated by Linear Differential Equation with Variable Coefficients]. *Nelineynyye kolebaniya* [Nonlinear Oscillations], 2007, vol. 10, no. 4, pp. 464–479.
9. Boichuk A.A., Shegda L.M. Singular Fredholm Boundary Value Problems. *Nelin. Koliv.,* 2007, vol. 10, no. 3, pp. 303–312.
10. Boichuk A.A., Pokutnyi A.A., Chistyakov V.F. Application of Perturbation Theory to the Solvability Analysis of Differential Algebraic Equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2013, vol. 53, issue 6, pp. 777–788.
11. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. *Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary Value Problems.* VSP, Utrecht, Boston, 2004.
12. Boichuk A.A., Shegda L.M. Bifurcation of Solutions of Singular Fredholm Boundary Value Problems. *Differential Equations,* 2011, vol. 47, no. 4, pp. 453–461.
13. Pokutnyi A.A. Bounded Solutions of Linear and Weakly Nonlinear Differential Equations in a Banach Space with Unbounded Operator in the Linear Part. *Differential Equations,* 2012, vol. 48, no. 6, pp. 809–819.

Поступила в редакцию 15 августа 2013 г.