УДК 519.6+517.9

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ

Д.А. Силаев

В работе предлагается метод построения квадратурной формулы высокого порядка аппроксимации для широкого класса областей, основанный на приближении гладкой функции на плоскости полулокальным сглаживающим сплайном или S-сплайном. Полулокальные сглаживающие сплайны были введены Д.А. Силаевым. Ранее рассматривались и применялись сплайны 3-й и 5-й степени. Настоящая работа посвящена использованию S-сплайнов более высоких степеней. Появление устойчивых S-сплайнов класса C^0 (только непрерывных), состоящих из полиномов высокой степени n ($n = 9, 10$) позволило получить квадратурные формулы 10-го и 11-го порядков аппроксимации. Предполагается, что интегрируемая функция принадлежит классу C^p ($p = 10, 11$) в несколько большей области, чем исходная область, по которой ведется интегрирование. Предполагается также, что граница области задана параметрически, что позволяет с высокой степенью точности учесть границу области. Подобный подход возможен и для построения кубатурных формул.

Ключевые слова: аппроксимация; сплайны; интегралы; квадратурные формулы; численные методы.

Введение

Теория квадратурных формул направлена на получение приближенных формул для вычисления интеграла, максимально точных при наименьшем числе узлов [1–4]. Составные квадратурные формулы (формула трапеций, Симпсона и т.п.) можно интерпретировать как формулы, полученные с помощью приближения интегрируемой функции интерполяционным сплайном типа Лагранжа (локальными сплайнами). Использование глобальных сплайнов также приводит к квадратурным формулам [5, 6]. Функции многих переменных могут быть приближены суммой произведений функций одной переменной [7], что приводит к построению квадратурных и кубатурных формул. Однако, существенным недостатком использования глобальных сплайнов является отсутствие удобных алгоритмов их построения для случая высоких степеней (выше 3, 5). Остается большой трудностью аппроксимация интегрируемой функции в окрестности границы области [8, 9].

На плоскости рассматривается ограниченная область Ω с границей $\gamma = \partial\Omega$. Предполагается, что граница задана параметрически

$$\gamma : \{\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), |t \in [\alpha, \beta]\},$$

где $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbf{C}^{1+\varepsilon}$ – заданные периодические функции, т.е. $\tilde{x}(\alpha) = \tilde{x}(\beta)$, $\tilde{y}(\alpha) = \tilde{y}(\beta)$, первые производные функций по $\tilde{x}, \tilde{y}$ удовлетворяют условию Гельдера с порядком $\varepsilon \geq 0$. В несколько большей области Ω_δ рассматривается гладкая функция $f \in \mathbf{C}^{n+1}$, т.е. она имеет непрерывные ограниченные $n+1$ частные производные. Квадратурная формула имеет вид:

$$\left(\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy\right) = \left(\sum_{k=1}^{N} c_k f(P_k)\right) + O(h^{n+1}), \tag{1}$$

где c_k – веса, P_k – узлы квадратурной формулы, h – шаг разбиения. Здесь k – номер полинома, составляющего сплайн, отвечающего точке P_k, а c_k – интеграл по области Ω от указанного полинома [10, 11]. Дополнительно будем предполагать, что исходная функция такова, что она определена в несколько большей области Ω_δ, содержащую область Ω с сохранением класса и нормы. Для простоты можно считать, что таковой областью является круг. Проблема, с которой мы здесь сталкиваемся, состоит из двух моментов. Во-первых, как унифицировать вычисление большого числа таких интегралов по заданной области. Во-вторых, как с большой степенью точности учесть вид границы области Ω. Эти проблемы решаем, сводя с помощью формулы Грина интеграл по области Ω к соответствующему интегралу по границе области $\gamma = \partial\Omega$.

1. Одномерный S-сплайн класса $\mathbf{C}^p$

Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ равномерную сетку $\{x_k\}_{k=0}^{k=K}$, $x_k = a + kh$, $h = (b-a)/K$ — шаг сетки. Разобьём отрезок $[a, b]$ на группы, для этого введём на $[a, b]$ ещё одну равномерную сетку $\{\xi_l^m\}_{l=0}^{l=L}$, $\xi_l^m = a + lH$, $H = mh, m \in N$. Здесь m фиксировано, индекс m в обозначении ξ_l^m в дальнейшем будем опускать. Таким образом, переходя из одной группы в другую, мы осуществляем сдвиг системы координат и рассматриваем каждый l-й полином на отрезке $[0, H]$. Пусть значения приближаемой функции на этой сетке $y = (y_0, y_1, \ldots, y_K) \in \mathbf{R}^{K+1}$. Обозначим через

$$P_S^n = \left\{ u : u(x) = a_0 + a_1 x \ldots + a_p x^p + \sum_{i=p+1}^{n} a_i x^i \right\}$$

множество полиномов степени n с фиксированными коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_p$. Рассмотрим функционал

$$\Phi^l(u) = \sum_{k=0}^{M} (u(\xi_l + kh) - y_{ml+k})^2 \quad .$$

В классе P_S^n ищется такой полином g_l, который минимизирует функционал

$$\Phi^l(u) = \sum_{k=0}^{M} (u(\xi_l + kh) - y_{ml+k})^2 \longrightarrow \min(a_{p+1}, \ldots, a_n)$$

и удовлетворяет следующим условиям:

$$a_0^l = g_{l-1}(H), a_1^l = g_{l-1}'(H), \ldots, a_p^l = \frac{1}{p!} g_{l-1}^{(p)}(H) \text{ при } l = 1, \ldots, L-1. \tag{2}$$

В случае периодического $S-$сплайна здесь при $l = 0$ выполнено $g_{l-1}(H) = g_{L-1}(H)$. Так как

$$a_0^l = g_l(0), a_1^l = g_l'(0), \ldots, a_m^l = \frac{1}{m!} g_l^{(m)}(0), \text{ при } m = 0, 1, \ldots, p,$$

то условия (2) есть условия гладкой склейки двух последовательных полиномов. В непериодическом случае коэффициенты $a_0^0, a_1^0, \ldots, a_p^0$ задаются начальными условиями $y_0, y_0', \ldots, \frac{y_0^{(p)}}{p!}$[1]. Можно предполагать, что значения заданной функции y_k известны с некоторой точностью, например, они есть результаты каких-либо измерений. Будем предполагать тогда, что с уменьшением шага h будет увеличиваться точность измерения, а именно,

[1] В случае если функция задана таблицей, то $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(p)}$, можно вычислить с помощью формул численного дифференцирования высокого порядка аппроксимации (см. [12]).

будем предполагать, что если функция $f \in \mathbf{C}^{n+1}[a,b]$ задана в узлах равномерной сетки $x_k = a+kh, k=0,1,\ldots,K$ своими значениями y_k, то $|y_k - f(x_k)| \leq Ch^{(n+1)}$. Здесь L – число групп, на которые разбита исходная таблица значений приближаемой функции, или число полиномов, составляющих сплайн. Кроме того, здесь $M+1$ – количество точек осреднения, $m+1$ – количество точек, входящих в область определения l-го полинома g_l, ξ_l – точка привязки полинома g_l, $M-m+1$ – число таких точек, значения которых участвуют при определении двух соседних полиномов, составляющих S-сплайн, $M \geq m+1$ ([12]).

Определение 1. *S-сплайном назовем функцию $S_{m,M}(x)$, которая совпадает с полиномом $g_l(x)$ на каждом отрезке $\xi_l \leq x < \xi_{l+1}$.*

Система линейных алгебраических уравнений, которой должны удовлетворять коэффициенты полиномов S-сплайна, состоит из уравнений двух видов: а) уравнений склейки для каждой пары последовательных полиномов (2); б) уравнений для определения коэффициентов при старших степенях полиномов по коэффициентам при младших степенях. Сделаем замену переменных $\tilde{a}_i = a_i h^i, i = 0,1,\ldots,n$.

Обозначим через

$$S_j = \sum_{k=0}^{M} k^j, \quad P_j^l = \sum_{k=0}^{M} y_{ml+k} k^{p+j}, \quad j=1,\ldots,n-p \quad ,C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \qquad . \tag{3}$$

Здесь $l = 0,\ldots,L-1$ – номер полинома, причем если $l=0$, то в периодическом случае выражение $\tilde{a}_k^{l-1}$ означает $\tilde{a}_k^{L-1}$. В дальнейшем, если это не вызовет путаницы, мы будем опускать волну над переменными a_k^l. Запишем систему для определения коэффициентов полиномов в матричной форме. Для этого обозначим через

$$A_0 = \begin{Vmatrix} S_{p+1} & \ldots & S_{2p+1} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ S_n & \ldots & S_{n+p} \end{Vmatrix}, \quad A_1 = \begin{Vmatrix} S_{2p+2} & \ldots & S_{n+p+1} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ S_{n+p+1} & \ldots & S_{2n} \end{Vmatrix},$$

$$B_0 = \begin{Vmatrix} 1 & m & m^2 \ldots & m^p \\ 0 & 1 & 2m \ldots & pm^{p-1} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \quad \ldots & 1 \end{Vmatrix}, \quad B_1 = \begin{Vmatrix} m^{p+1} & m^{p+2} & \ldots & m^n \\ (p+1)m^p & (p+2)m^{p+1} & \ldots & nm^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ C_{p+1}^p m & C_{p+2}^p m^2 & \ldots & C_n^p m^{n-p} \end{Vmatrix}.$$

Здесь прямоугольные матрицы A_0 и B_1 имеют размерности $(n-p)\times(p+1)$ и $(p+1)\times(n-p)$ соответственно, размерности квадратных матриц A_1 и B_0 $(n-p)\times(n-p)$ и $(p+1)\times(p+1)$. Пусть, кроме того,

$$P^l = \begin{pmatrix} P_1^l \\ P_2^l \\ \vdots \\ P_{n-p}^l \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad X_0^l = \begin{pmatrix} a_0^l \\ a_1^l \\ \vdots \\ a_p^l \end{pmatrix}, \quad X_1^l = \begin{pmatrix} a_{p+1}^l \\ a_{p+2}^l \\ \vdots \\ a_n^l \end{pmatrix}, \text{ где } \quad l = 0,1,\ldots,L-1. \tag{4}$$

Тогда уравнения а) склейки для каждой пары последовательных полиномов (2) примут вид:

$$B_0 X_0^l + B_1 X_1^l = X_0^{l+1} \quad , \tag{5}$$

а уравнения б) для определения коэффициентов при старших степенях полиномов по коэффициентам при младших степенях:

$$A_0 X_0^l + A_1 X_1^l = P^l \quad . \tag{6}$$

2. Существование и единственность S-сплайна класса $\mathbf{C}^p$

Предположим, что m и M таковы, что матрица A_1 имеет обратную. Тогда из (6) получаем, что

$$X_1^l = A_1^{-1}P^l - AX_0^l \quad , \tag{7}$$

где $A = A_1^{-1}A_0$. Подставим выражение для X_l^1 в (5). Тогда получим рекуррентное соотношение, связывающее $p+1$ младших коэффициентов $l+1$ полинома через $p+1$ младших коэффициентов l полинома:

$$X_0^{l+1} = UX_0^l + \Psi^l \quad , \tag{8}$$

где $\Psi^l = B_1A_1^{-1}P^l$, матрица устойчивости $U = B_0 - B_1A_1^{-1}A_0$ имеет размерность $(p+1)\times(p+1)$.

Рассмотрим сначала непериодический случай. Зададим начальный вектор

$$X_0^0 = \left(\ y_0, hy_0', \ldots, \tfrac{1}{p!}h^p y_0^{(p)}\ \right)^T,$$

где значения производных, входящих в X_0^0 , могут быть вычислены приближенно с высокой степенью точности с помощью формул численного дифференцирования. Пользуясь формулами (7),(8), последовательно находим $X_1^0, X_0^1, \ldots, X_1^{L-1}$. Тем самым все коэффициенты полиномов, составляющих сплайн, однозначно определены.

Теорема 1. *Пусть числа m, M, p, n таковы, что $detA_1 \neq 0$. Тогда для любой функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a,b]$ своими значениями y_k в точках $x_k = a+kh, h=(b-a)/K$ и начального вектора X_0^0 существует единственный непериодический сплайн $S_{m,M}^n[y](x)$ класса $\boldsymbol{C}^p$.*

В периодическом случае применяя рекуррентную формулу (8) $L-1$ раз, получим:

$$X_0^0 = X_0^L = UX_0^{L-1} + \Psi^{L-1} = U(UX_0^{L-2} + \Psi^{L-2}) + \Psi^{L-1} = \ldots = U^L X_0^0 + \sum_{s=1}^{L} U^{L-s}\Psi^{s-1},$$

откуда

$$X_0^0 = (E - U^L)^{-1}\sum_{s=1}^{L} U^{L-s}\Psi^{s-1}.$$

Затем последовательно находим $X_1^0, X_1^1, \ldots, X_1^{L-1}$. Тем самым все коэффициенты полиномов, составляющих периодический сплайн, однозначно определены.

Теорема 2. *Пусть числа m, M, p, n таковы, что $detA_1 \neq 0$ и собственные числа матрицы U не равны корню степени L из единицы (здесь L – число полиномов, составляющих сплайн). Тогда для любой функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a,b]$ своими значениями y_k в точках $x_k = a+kh, h=(b-a)/K$ существует единственный периодический сплайн $S_{m,M}^n[y](x)$ класса $\boldsymbol{C}^p$.*

3. Устойчивость и сходимость S-сплайна класса $\mathbf{C}^p$

Теорема 3. *Пусть периодическая функция $f(x) \in \boldsymbol{C}^{n+1}[a,b]$, и пусть выполнено условие*

$$|f(x_k) - y_k| \leq C_0 h^{n+1+\varepsilon}, \quad \varepsilon \geq 0 \quad . \tag{9}$$

Пусть, кроме того, числа m, M, p, n таковы, что $det A_1 \neq 0$, и собственные значения матрицы U по модулю меньше единицы, т.е.

$$|\lambda_i| < 1, \quad i = 1, \ldots, p+1. \tag{10}$$

Тогда периодический сплайн $S^n_{m,M} \in C^p[a,b]$ с узлами на равномерной сетке имеет дефект $n-p$, и для $x \in [a,b]$ справедливы следующие оценки:

$$|f^{(r)}(x) - \frac{d^r}{dx^r} S^n_{m,M}(x)| \leq C_r h^{n+1-r}, \quad \text{для} \quad r = 0, 1, \ldots, n; \tag{11}$$

$x \neq \xi_l$ *при* $r = p+1, \ldots, n;$ *в этом случае* $\varphi^{(r)}(\xi_l) \equiv \varphi^{(r)}(\xi_l + 0)$.

Аналогичные утверждения справедливы и для непериодического случая (см. [12]).

Собственные числа матрицы U определяются из уравнения

$$det(U - \lambda E) = 0. \tag{12}$$

Для случая малых значений M (при $3 \leq M \leq 20$) в результате расчета были получены значения собственных чисел матрицы U. Как показано в случаях $n = 3$ и $n = 5$, для обеспечения условия устойчивости, т.е. выполнения неравенства (10), необходимо перекрывание. Это означает, что имеются такие элементы исходной таблицы значений функции, которые участвуют в определении коэффициентов не менее двух соседних полиномов, составляющих сплайн. Если перекрывание достаточно большое, то это в ряде случаев является и достаточным условием [13]. На практике наиболее употребительными являются те сплайны, для построения которых используется небольшое число точек осреднения M. Некоторые наиболее интересные полученные значения m и M можно найти в таблице работы [12]. Показано, что в случае $p = 0$ и $n = M$, $1 \leq m \leq M-1$ матрица U есть число, равное 0. В этих случаях $S-$сплайны обладают высокими аппроксимационными свойствами и удобны, например, для построения формул численного интегрирования (квадратурных, кубатурных).

4. Фундаментальный S-сплайн

Фундаментальный периодический S-сплайн $B_j(x)$ – это S-сплайн, построенный по данным $y = (y_0, y_1, \ldots, y_K) \in \mathbf{R^{K+1}}$ вида: $\{y_i = \delta_{ij} | i, j = 0, 1, \ldots, K\}$, δ_{ij} – символ Кронекера. Легко видеть, что линейная комбинация

$$S(x) = \sum_{j=0}^{K} y_j B_j(x)$$

является S-сплайном, приближающим данные $\{y_i | i = 0, 1, \ldots, K\}$. Непериодические фундаментальные сплайны дополняются сплайнами с начальными условиями $y'_0, y''_0, \ldots, y^{(p)}(0)$, принимающими значения 0 или 1.

5. Двумерный полулокальный сглаживающий сплайн класса $\mathbf{C}^p$

5.1. Построение $\varphi - r - S$-сплайна на круге

Будем рассматривать на единичном круге полярные сетки:

$$\{\varphi_i = ih_1 | i = 0, 1, \ldots, K_1\}, \{\Phi_k = kH_1 | k = 0, 1, \ldots, L_1\}, H_1 = m_1 h_1, K_1 = m_1 L_1, K_1 h_1 = 2\pi,$$

$$\{r_j = jh_2 | j = 0,1,\dots,K_2\}, \{R_l = lH_2 | l = 0,1,\dots,L_2\}, H_2 = m_2h_2, K_2 = m_2L_2, K_2h_2 = 1.$$

Будем строить аппроксимацию функции $f(\varphi, r)$ на круге при условии, что функция f имеет n+1 производных по переменным r и φ, то есть $f \in \mathbf{C}^{(n+1)}[0,1] \times [0,2\pi]$. Пусть $\{y_{ij} = f(\varphi_i, r_j), \quad i = 0,1,\dots,K_1, \quad j = 0,1,\dots,K_2\}$ – значения в узлах сетки, по которым будет проводиться аппроксимация. При каждом $j = 0,1,\dots,K_2$ построим периодический S-сплайн $S_j(\varphi)$ на отрезке $[0,2\pi]$ по заданным $\{y_{ij} | i = 0,1,\dots,K_1\}$. Каждый из этих сплайнов аппроксимирует функцию $f(\varphi, r_j)$ на окружности с радиусом r_j, причём в силу теоремы 3 о сходимости

$$\left| S_j^{(\mu)}(\varphi) - \frac{\partial^\mu}{d\varphi^\mu} f(\varphi, r_j) \right| \le C h_1^{n+1-\mu}, \quad \mu = 0,1,\dots,n \quad, \varphi \in [0,2\pi].$$

Далее фиксируем произвольное $\widetilde{\varphi} \in [0,2\pi]$. Рассмотрим набор $\{z_j = S_j(\widetilde{\varphi}) | j = 1,\dots,K_2, z_0 = y_{00}\}$, y_{00} – значение функции f в начале координат. Также обозначим через $z_0', \dots, z_0^{(p)}$ значения, получаемые по некоторому алгоритму по набору $\{z_j\}$, которые приближают $f_r'(\widetilde{\varphi}, r)|_{r=0}, \dots, f_r^{(p)}(\widetilde{\varphi}, r)|_{r=0}$ с порядками $n, \dots, (n+1-p)$ соответственно (например, с помощью формул численного дифференцирования высокого порядка, см. [12]). По набору $\{z_j\}$ и $z_0', \dots, z_0^{(p)}$ строим $S_{\widetilde{\varphi}}(r)$ – непериодический S-сплайн на отрезке $[0,1]$. Будем считать, что $m_2 < M_2\zeta_*$. Это гарантирует, что собственные значения матрицы U по модулю меньше единицы. Тогда, построенный для $\widetilde{\varphi}$ сплайн $S_{\widetilde{\varphi}}(r)$ будет аппроксимировать функцию $f(\widetilde{\varphi}, r)$ при $r \in [0,1]$.

Определение 2. *Назовём $\varphi - r$- сплайном функцию $S(\varphi, r)$, значение которой при любых φ и r определяется по следующему алгоритму: по набору $\{z_j = S_j(\varphi) |\, j = 1,\dots,K_2$, $z_0 = y_{00}\}$, $z_0', \dots, z_0^{(p)}$ строим $S_\varphi(r)$, затем полагаем $S(\varphi, r) = S_\varphi(r)$, другими словами $S(\varphi, r) = \{S_\varphi(r) | \{z_j = S_j(\varphi) | \quad j = 1,\dots,K_2, \quad z_0 = y_{00}\}\}$.*

Очевидно, что этот сплайн можно дифференцировать по r n раз в любой точке, не принадлежащей сетке, то есть $r \ne R_j$. При $r = R_j$ определим производную следующим образом:

$$\frac{\partial^\nu}{\partial r^\nu} S(\varphi, r) = \frac{\partial^\nu}{\partial r^\nu} S(\varphi, r+0), \quad \nu = 0,1,\dots,p.$$

Определение 3. *Назовём производной порядка μ по φ от $\varphi - r$-сплайна $(\mu = 1,\dots,n)$ функцию $\frac{\partial^\mu}{\partial \varphi^\mu} S(\varphi, r)$ на единичном круге, которая равна $\varphi - r$-сплайну, построенному по набору*

$$\{z_j = \frac{d^\mu}{d\varphi^\mu} S_j(\varphi) | \quad j = 1,\dots,K_2, z_0 = y_{00}\}.$$

Как и в случае с производной по r, под производной по φ в точках $\varphi = \Phi_k$ понимается значение в точке $\varphi = \Phi_k + 0$. Наконец, можно ввести понятие смешанной производной.

Определение 4. *Под смешанной производной $\frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial r^\mu \partial \varphi^\nu} S(\varphi, r)$ понимается производная порядка μ по r от производной порядка ν по φ от $S(\varphi, r)$, где производные трактуются согласно определениям 2 и 3.*

5.2. Сходимость $\varphi - r - S$-сплайна

Обозначим $h = max(h_1, h_2)$.

Теорема 4. *Пусть $m_1/M_1 < \zeta_*$, $m_2/M_2 < \zeta_*$ и $f \in \mathbf{C}^{(n+1)}[0,2\pi] \times [0,1]$. Тогда для $\varphi - r$-сплайна $S(\varphi, r)$ справедливы оценки:*

$$\left|\frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial r^\mu \partial\varphi^\nu} S(\varphi,r) - \frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial r^\mu \partial\varphi^\nu} f(\varphi,r)\right| \le C_{\mu\nu} h^{n+1-\mu-\nu}, \quad \textit{где } \mu,\nu \ge 0, \quad 0 \le \mu+\nu \le n. \tag{13}$$

Аналогично можно ввести понятие и $r-\varphi$-сплайна [14].

5.3. Получение S-сплайна на круге как явной функции двух переменных

Будем обозначать фундаментальные сплайны по φ как $C_i(\varphi)$, а фундаментальные сплайны по аргументу r как $D_j(r)$.

$$S(\varphi,r) = \{S_\varphi(r) | \{z_j = S_j(\varphi) | \quad j = 1,\ldots,K_2, z_0 = y_{00}\}\} = S_\varphi(r).$$

В свою очередь,

$$S_\varphi(r) = \sum_{j=0}^{K_2} z_j D_j(r) = \sum_{j=0}^{K_2} D_j(r) \sum_{i=0}^{K_1-1} y_{ij} C_i(\varphi) = \sum_{i=0}^{K_1-1} \sum_{j=0}^{K_2} y_{ij} C_i(\varphi) D_j(r) \tag{14}$$

(здесь ограничиваемся случаем $p=0$; в общем случае добавляются слагаемые $z_j' D_{j0}(r) + \ldots + z_j^{(p)} D_{jp}(r)$, где фундаментальный сплайн D_{jp} отвечает нулевому набору z_j и $z_j^{(p)} = 1$). Предпоследнее равенство следует из определения набора $\{z_j = S_j(\varphi)\}$ и разложения по фундаментальным сплайнам

$$S_j(\varphi) = \sum_{i=0}^{K_1-1} y_{ij} C_i(\varphi).$$

Теперь рассмотрим укрупненную сетку на окружности $\{\Phi_k = kH_1 | \quad k = 0,1,\ldots,L_1\}$, где $H_1 = m_1 h_1$ и $\{R_l = lH_2| \quad l = 0,1,\ldots,L_2\}$, где $H_2 = m_2 h_2$. Рассмотрим вид S-сплайна в некотором произвольном секторе этой сетки: $\varphi = kH_1 + \widetilde{\varphi}, \quad r = lH_2 + \widetilde{r}$, где $|\widetilde{\varphi}| \le H_1$ и $|\widetilde{r}| \le H_2$. В этом секторе фундаментальные S-сплайны согласно определению представляются в виде полиномов n-й степени:

$$C_i(\varphi) = \sum_{p=0}^{n} c_{pk}^i \widetilde{\varphi}^p, \quad D_j(r) = \sum_{q=0}^{n} d_{ql}^j \widetilde{r}^q.$$

Подставляя эти выражения в формулу (14) для функции $S(\varphi,r)$ и меняя порядок суммирования, получим:

$$S(\varphi,r) = \sum_{i=0}^{K_1-1} \sum_{j=0}^{K_2} y_{ij} \sum_{p=0}^{n} c_{pk}^i \widetilde{\varphi}^p \sum_{q=0}^{n} d_{ql}^j \widetilde{r}^q = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} \widetilde{\varphi}^p \widetilde{r}^q (\sum_{i=0}^{K_1-1} \sum_{j=0}^{K_2} y_{ij} c_{pk}^i d_{ql}^j) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} a_{pq}^{kl} \widetilde{\varphi}^p \widetilde{r}^q.$$

Таким образом, показано, что на каждом произвольном секторе функция $S(\varphi,r)$ представляет полином n-й степени вида

$$S(\varphi,r) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} a_{pq}^{kl} \widetilde{\varphi}^p \widetilde{r}^q, \quad \text{где} \quad a_{pq}^{kl} = \sum_{i=0}^{K_1-1} \sum_{j=0}^{K_2} y_{ij} c_{pk}^i d_{ql}^j, \tag{15}$$

или сплайн-функцию двух переменных [14]. Заметим, что в выражения для коэффициетов a_{pq}^{kl} входят значения всех y_{ij}, содержащихся в круге. Аналогичные выражения можно получить для всех многомерных областей, представляющих собой тензорные произведения одномерных, например, для прямоугольника и тора.

Представление сплайна на круге в виде разложения по одномерным фундаментальным сплайнам (14) позволяет определить понятие смешанной производной для двумерного сплайна.

Определение 5. *Под смешанной производной двумерного сплайна* $\frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial r^{\mu}\partial\varphi^{\nu}}S(\varphi,r)$, *где* $0 \le \mu+\nu \le n$, *понимается следующая конечная сумма*

$$\sum_{i=0}^{K_1-1}\sum_{j=0}^{K_2} y_{ij}\frac{d^{\mu}}{d\varphi^{\mu}}C_i(\varphi)\frac{d^{\nu}}{dr^{\nu}}D_j(r),$$

состоящая из формальных производных от соответствующих фундаментальных сплайнов по φ *и* r.

Эту формулу можно рассматривать как формулу численного дифференцирования, основанную на приближении двумерной функции полулокальным сглаживающим сплайном.

Всё то же самое верно и для $r-\varphi$-сплайна.

5.4. Получение квадратурных формул для одномерных интегралов

Подставим выражение S-сплайна через фундаментальные сплайны в интеграл:

$$\int_A^B S(x)dx = \int_A^B \sum_{i=0}^{K} y_i C_i(x)dx = \sum_{i=0}^{K} c_i y_i, \tag{16}$$

где

$$c_i = \int_A^B C_i(x)dx = \sum_{m=0}^{L_1-1}\sum_{s=0}^{n} a_s^{im}\frac{H^{s+1}}{s+1},$$

– искомые коэффициенты квадратуры. Здесь a_s^{im} – s-й коэффициент m-го полинома в i-м фундаментальном сплайне (т.е. построенном по набору данных $\{y_k = \delta_{ik} | \quad k = 0,1,\ldots,K\}$, где δ_{ik}– символ Кронекера). Заметим, что в непериодическом случае указанные фундаментальные сплайны дополняются сплайнами с начальными условиями $y_0', \ldots, y_0^{(p)}$, принимающими значения 0 или 1. Эти формулы имеют $(n+1)$-й порядок аппроксимации.

5.5. Получение квадратурных формул для двумерных интегралов на круге K

Подставим в интеграл по единичному кругу выражение $\varphi - r$-сплайна в виде (14):

$$\iint_K S(\varphi,r)d\Omega = \int_0^{2\pi}\int_0^1 S(\varphi,r)rdrd\varphi = \sum_{i=0}^{K_1-1}\sum_{j=0}^{K_2} y_{ij}\int_0^{2\pi} C_i(\varphi)d\varphi\int_0^1 D_j(r)rdr.$$

Отсюда получаем:

$$\iint_K S(\varphi,r)d\Omega = \sum_{i=0}^{K_1-1}\sum_{j=0}^{K_2} c_i d_j y_{ij}, \tag{17}$$

где

$$c_i = \int_0^{2\pi} C_i(\varphi)d\varphi = \sum_{m=0}^{L_1-1}\sum_{\kappa=0}^{n} a_{\kappa}^{im}\frac{H_1^{\kappa+1}}{\kappa+1},$$

$$d_j = \int_0^1 D_j(r)rdr = \sum_{s=0}^{L_2+1} \int_{\xi_s}^{\xi_{s+1}} rD_j(r)dr = \sum_{s=0}^{L_2+1} \int_0^{H_2} (u+\xi_s) \sum_{q=0}^{n} b_q^{js} u^q du =$$

$$= \sum_{s=0}^{L_2+1} \int_0^{H_2} \sum_{q=0}^{n} b_q^{js} (u^{q+1} + sH_2 u^q) du = \sum_{s=0}^{L_2+1} \sum_{q=0}^{n} b_q^{js} H_2^{q+2} \left(\frac{1}{q+2} + \frac{s}{q+1} \right).$$

Здесь a_κ^{im} и b_q^{js} – κ-й и q-й коэффициенты m-го и s-го полиномов в i-м и j-м фундаментальном периодическом сплайне на окружности $[0, 2\pi]$ и непериодическом сплайне на отрезке $[0, 1]$ соответственно. Здесь $H_1 = 2\pi/L_1$, $H_2 = 1/L_2$. Фундаментальный периодический сплайн $C_i(\varphi)$ строится по набору данных $\{y_k = \delta_{ik} | \quad k = 0, 1, \ldots, K_1\}$. Непериодический фундаментальный сплайн $D_j(r)$ строится по набору данных $\{y_k = \delta_{jk} | \quad k = 0, 1, \ldots, K_2; y_0', \ldots, y_0^{(p)}\}$, где δ_{ik}– символ Кронекера, $y_0', \ldots, y_0^{(p)}$ принимают значения либо 0, либо 1.

5.6. Квадратурные формулы для двумерных односвязных областей

На плоскости рассматривается ограниченная область Ω с границей $\gamma = \partial\Omega$, где γ – замкнутая самонепересекающаяся кусочно-гладкая кривая. Предполагается, что граница задана параметрически: $\{\gamma = \{\widetilde{x}(t), \widetilde{y}(t)\} | t \in [\alpha, \beta]\}$, где $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \mathbf{C}^{1+\varepsilon}$ – заданные периодические функции, т.е. $\widetilde{x}(\alpha) = \widetilde{x}(\beta), \widetilde{y}(\alpha) = \widetilde{y}(\beta)$, первые производные функций $\widetilde{x}, \widetilde{y}$ удовлетворяют условию Гельдера с порядком $\varepsilon \geq 0$ (быть может за исключением отдельных точек). Будем предполагать также, что функция f определена и $(n+1)$ раз непрерывно дифференцируема в несколько большей области Ω_δ. Для простоты будем считать, что область Ω_δ есть круг K радиуса R.

Построение аппроксимирующей сетки будем производить следующим образом. Поместим область Ω в круг K радиуса R и введём полярную систему координат, связанную с центром круга. Будем рассматривать в круге радиуса R полярные сетки:

$$\{\varphi_i = ih_1 | i = 0, 1, \ldots, K_1\}, \{\Phi_k = kH_1, k = 0, 1, \ldots, L_1\},$$

$$\{r_j = jh_2 | j = 0, 1, \ldots, K_2\}, \{R_l = lH_2, l = 0, 1, \ldots, L_2\}, \tag{18}$$

$$H_1 = m_1 h_1, K_1 = m_1 L_1, K_1 h_1 = 2\pi, H_2 = m_2 h_2, K_2 = m_2 L_2, K_2 h_2 = R.$$

Пусть $u_{ij} = f(\varphi_i, r_j)$ – сужение функции f на равномерную сетку (18). По таблице значений u_{ij} строим полулокальный сглаживающий сплайн $S(\varphi, r)$, состоящий из полиномов $n-$ой степени, например, $r - \varphi$-сплайн, определенный на всем круге K. Из оценки (13) следует, что S аппроксимирует функцию f с порядком $O(h^{(n+1)})$, где $h = max(h_1, h_2)$ в области Ω_δ. Подставим в интеграл по области Ω выражение для $r - \varphi$-сплайна в виде:

$$\iint_\Omega S(\varphi, r) d\Omega = \iint_\Omega S(\varphi, r) r dr d\varphi = \sum_{i=0}^{K_1-1} \sum_{j=0}^{K_2} c^{ij} y_{ij}, \tag{19}$$

где

$$c^{ij} = \iint_\Omega C_i(\varphi) D_j(r) r dr d\varphi. \tag{20}$$

Заметим, что выражение в (20), стоящее под знаком интеграла, есть произведение функций, каждая из которых зависит лишь от одной переменной, что весьма существенно. Применять формулы типа (17) становится неудобно, так как граница γ будет проходить внутри части секторов (см. п. 5.3). Произведём универсализацию вычисления интегралов в (20). Для их вычисления применим формулу Грина–Стокса:

$$\oint_\gamma (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{\tau}) ds = \iint_\Omega (rot \overrightarrow{a}, \overrightarrow{k}) d\Omega,$$

где $\overrightarrow{a} = \{P, Q, 0\}$, $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$, $\overrightarrow{\tau}$ – единичный вектор касательной к кривой γ, ограничивающей область Ω, $\overrightarrow{k}$ – единичный вектор, перпендикулярный плоскости области Ω. Линейная форма имеет вид:

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{\tau}) ds = P dx + Q dy = P_r dr + r Q_\varphi d\varphi,$$

где $P_r = P \cos\varphi + Q \sin\varphi$, $Q_\varphi = -P \sin\varphi + Q \cos\varphi$. Выражение для ротора в полярной системе координат:

$$rot \overrightarrow{a} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r Q_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial P_r}{\partial \varphi} \right) \overrightarrow{k}.$$

Поэтому

$$c^{ij} = \iint_\Omega C_i(\varphi) D_j(r) r dr d\varphi = \iint_\Omega \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r Q_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial P_r}{\partial \varphi} \right) r dr d\varphi = \oint_\gamma P_r dr + r Q_\varphi d\varphi.$$

Отсюда получаем, что

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r Q_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial P_r}{\partial \varphi} \right) = C_i(\varphi) D_j(r). \tag{21}$$

Этому уравнению удовлетворяют

$$P_r = 0, \quad Q_\varphi = \frac{1}{r} C_i(\varphi) \int_0^r D_j(t) t dt.$$

Иными словами, в качестве функции $r Q_\varphi(\varphi, r)$ возьмём первообразную от функции $r D_j(r)$ (по r), умноженную на $C_i(\varphi)$. Заметим, что эта первообразная есть сплайн, состоящий из полиномов $n + 2$ степени. Константу интегрирования в первообразной выберем так, чтобы выполнялось $Q_\varphi(\varphi, 0) = 0$. Отсюда получаем

$$c^{ij} = \oint_\gamma C_i(\varphi) \left(\int_0^r D_j(t) t dt \right) d\varphi. \tag{22}$$

Обратим внимание на то, что непериодический фундаментальный сплайн $D_j(r) = 0$ при $r < r_j$, если точка с координатами (φ_i, r_j) не принадлежит некоторой области $\Omega_\delta \supset \Omega$. Поэтому $Q_\varphi(\varphi, r) = 0$ при $r < r_j$. Итак, показано, что все коэффициенты c^{ij} равны нулю для таких пар (i, j), при которых точки с координатами $(\varphi_i, r_j) \notin \Omega_\delta$, где $\delta = \delta(M, m, h)$.

5.7. Частный случай «простой» области

Область назовём «простой», если внутри неё найдётся такая точка, что любой луч, выпущенный из этой точки, пересечёт границу области только в одной точке. Поместим начало координат в эту точку и введём полярную систему координат. Тогда граница γ области Ω задается функцией $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Зафиксируем некоторое φ. Заметим, что $D_j(r) \equiv 0$ при $r \leq r_j - M_2 h_2$, где M_2–количество точек осреднения, используемых при построении $D_j(r)$. Пусть $\xi_{l_1} \leq r_j - M_2 h_2$. Тогда $D_j(r) \equiv 0$ при $r \leq \xi_{l_1}$. Пусть $r(\varphi) \in [\xi_{l_2}, \xi_{l_2+1})$ (заметим, что $l_2 = l_2(\varphi)$ зависит от угла φ и границы области Ω).

$$\int_0^{r(\varphi)} tD_j(t)dt = \sum_{s=l_1}^{l_2-1} \int_{\xi_s}^{\xi_{s+1}} tD_j(t)dt + \int_{\xi_{l_2}}^{r(\varphi)} tD_j(t)dt =$$

$$= \sum_{s=l_1}^{l_2-1} \int_0^{H_2} (u+\xi_s) \sum_{q=0}^{5} b_q^{js} u^q du + \int_0^{r(\varphi)-\xi_{l_2}} (u+\xi_{l_2}) \sum_{q=0}^{5} b_q^{jl_2} u^q du =$$

$$= \sum_{s=l_1}^{l_2-1} \int_0^{H_2} \sum_{q=0}^{5} b_q^{js} (u^{q+1} + sH_2 u^q) du + \int_0^{r(\varphi)-\xi_{l_2}} \sum_{q=0}^{5} b_q^{jl_2} (u^{q+1} + l_2 H_2 u^q) du =$$

$$= \sum_{s=l_1}^{l_2-1} \sum_{q=0}^{5} b_q^{js} H_2^{q+2} \left(\frac{1}{q+2} + \frac{s}{q+1} \right) + \sum_{q=0}^{5} b_q^{jl_2} \left(\frac{(r(\varphi)-l_2H_2)^{q+2}}{q+2} + l_2 H_2 \frac{(r(\varphi)-l_2H_2)^{q+1}}{q+1} \right).$$

Поэтому

$$c^{ij} = \oint_\gamma \sum_{s=l_1}^{l_2(\varphi)-1} \sum_{q=0}^{5} b_q^{js} H_2^{q+2} \left(\frac{1}{q+2} + \frac{s}{q+1} \right) C_i(\varphi) d\varphi +$$

$$+ \oint_\gamma \sum_{q=0}^{5} b_q^{jl_2(\varphi)} \left(\frac{(r(\varphi)-l_2(\varphi)H_2)^{q+2}}{q+2} + l_2(\varphi) H_2 \frac{(r(\varphi)-l_2(\varphi)H_2)^{q+1}}{q+1} \right) C_i(\varphi) d\varphi, \qquad (23)$$

где

$$C_i(\varphi) = \sum_{n=0}^{L_1-1} \sum_{p=0}^{5} a_p^{in} \varphi^p.$$

Здесь a_p^{in} и b_q^{js} – p-й и q-й коэффициенты n-го и s-го полиномов в i-м фундаментальном периодическом сплайне на окружности $[0, 2\pi]$ и в j-м фундаментальном непериодическом сплайне на отрезке $[0, R]$. Шаг $H_1 = 2\pi/L_1$. Фундаментальный периодический сплайн $C_i(\varphi)$ строится по набору данных $\{y_k = \delta_{ik} | \quad k = 0, 1, \ldots, K_1\}$. Шаг $H_2 = 1/L_2$, фундаментальный непериодический сплайн $D_j(r)$ строится по набору данных $\{y_k = \delta_{jk} | \quad k = 0, 1, \ldots, K_2; y_0', \ldots, y_0^{(p)}\}$, где $y_0', \ldots, y_0^{(p)}$ принимают значения либо 0, либо 1.

5.8. Оценка точности квадратурной формулы для двумерных односвязных областей

Обозначим через $h = max(h_1, h_2)$. Пусть выполнены условия устойчивости матрицы U, например, $m_1/M_1 < \zeta_*$, $m_2/M_2 < \zeta_*$ и пусть $f \in \mathbf{C}^{(n+1)}(\Omega_\delta)$, где $\Omega_\delta \supset \Omega$, т.е. мы предполагаем, что функция f определена и (n+1) раз непрерывно дифференцируема в несколько большей области $\Omega_\delta \supset \Omega$. Поместим область Ω_δ в круг K радиуса R. Введём полярную систему координат, взяв за начало координат центр круга R. Продолжим функцию f в $K \setminus \Omega_\delta$ тождественным нулем. Обозначим через $S(\varphi, r)$ $r - \varphi$-сплайн, приближающий таким образом продолженную функцию f на круге K.

Теорема 5. *Пусть $S(\varphi, r)$ – это $r - \varphi$-сплайн, приближающий функцию f, пусть $(M+m)h \le \rho(\gamma_\delta, \gamma)$. Здесь $\rho(\gamma_\delta, \gamma)$ – расстояние между границами областей Ω_δ и Ω соответственно. Тогда справедлива оценка:*

$$\left| \iint_\Omega f(x,y) d\Omega - \sum_{i=0}^{K_1-1} \sum_{j=0}^{K_2} c^{ij} y_{ij} \right| \le Ch^{(n+1)}. \qquad (24)$$

Здесь $y_{ij} = f(\varphi_i, r_j)$ – значения функции f в узлах сетки, весовые коэффициенты c^{ij} определены формулами (22),(23), суммирование поизводится лишь по тем индексам i и j, для которых $(\varphi_i, r_j) \in \Omega_\delta$.

Доказательство. Заметим, что

$$\sum_{i=0}^{K_1-1} \sum_{j=0}^{K_2} c^{ij} = 1,$$

т.к. $S(\varphi, r) \equiv 1$, если $f \equiv 1$. Из (13) следует, что $|S(\varphi, r) - f(\varphi, r)| \leq C_{00} h^{(n+1)}$. Поэтому

$$\left| \iint_\Omega f(x,y) d\Omega - \sum_{i=0}^{K_1-1} \sum_{j=0}^{K_2} c^{ij} y_{ij} \right| \leq \left| \iint_\Omega f d\Omega - \iint_\Omega S d\Omega \right| + \left| \iint_\Omega S d\Omega - \sum_{i=0}^{K_1-1} \sum_{j=0}^{K_2} c^{ij} y_{ij} \right| \leq$$

$$\leq C_{00} h^{(n+1)} mes(\Omega) + \left| \iint_\Omega \left(S - \sum_{i=0}^{K_1-1} \sum_{j=0}^{K_2} y_{ij} C_i(\varphi) D_j(r) \right) d\Omega \right|$$

Последнее слагаемое равно нулю, так как $C_i(\varphi) D_j(r) = 0$ в области Ω для тех пар индексов i и j, для которых $(\varphi_i, r_j) \notin \Omega_\delta$. □

Замечание 1. Если заданную функцию f приближать $\varphi - r$-сплайном, то оценка (24) также будет справедлива, так как на круге K $\varphi - r$-сплайн отличается от $r - \varphi$-сплайна на величину $O(h^{(n+1)})$.

Замечание 2. Особенно удобными получаются квадратурные формулы при использовании полулокальных сглаживающих сплайнов класса $\mathbf{C}^0$ при $m = 1$.

Литература

1. Бабенко, К.И. Основы численного анализа / К.И. Бабенко. – М.; Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2002.
2. Соболев, С.Л. Введение в теорию кубатурных формул / С.Л. Соболев. – М.: Наука, 1974.
3. Мысовских, И.П. Интерполяционные кубатурные формулы / М.П. Мысовских. – М.: Наука, 1981.
4. Крылов, А.Н. Лекции о приближенных вычислениях / А.Н. Крылов. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.
5. Стечкин, С.Б. Сплайны в вычислительной математике / С.Б. Стечкин, Ю.Н. Субботин. – М.: Наука, 1976.
6. Завьялов, Ю.С. Методы сплайн-функций / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко. – М.: Наука, 1980.
7. Колмогоров, А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции функций одного переменного и сложения / А.Н. Колмогоров // Избранные труды. Математика и механика. – М.: Наука, 1985.
8. Соболев, С.Л. Кубатурные формулы / С.Л. Соболев, В.Л. Васкевич. – Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996.
9. Рамазанов, М.Д. Теория решетчатых кубатурных формул с ограниченным пограничным слоем / М.Д. Рамазанов. – Уфа: ИМВЦ УНЦ РАН, 2009.

10. Силаев, Д.А. О кубатурных формулах высокого порядка аппроксимации для широкого класса областей / Д.А. Силаев, Д.О. Коротаев // Сб. тр. XVI междунар. конф. «Математика. Компьютер. Образование»/ под ред. Г.Ю. Ризниченко. – Ижевск, 2009. – Т. 2. – С. 20–38.
11. Силаев, Д.А. О кубатурных формулах высокого порядка аппроксимации для произвольных областей / Д.А. Силаев // Сб. тр. междун. конф. «Современная математика и математическое образование, проблемы истории и философии математики»/ под ред. А.А. Артемова. – Тамбов, 2008. – С. 65–70.
12. Силаев, Д.А. Полулокальные сглаживающие S-сплайны / Д.А.Силаев // Компьютерные исследования и моделирование. – 2010. – Т. 2, № 4. – С. 349–358.
13. Силаев, Д.А. Приближение S-сплайнами гладких функций / Д.А. Силаев, Г.И. Якушина // Тр. семинара имени И.Г. Петровского. – 1984. – Вып. 10. – С. 197–206.
14. Силаев, Д.А. S-сплайн на круге / Д.А. Силаев, Д.О. Коротаев // Тез. междунар. конф. «Математика. Компьютер. Образование». – Пущино, 2003. – С. 157.

Дмитрий Алексеевич Силаев, кандидат физико-математических наук, кафедра «Общие проблемы управления», Механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, dasilaev@mail.ru.

Bulletin of the South Ural State University.
Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»,
2013, vol. 6, no. 4, pp. 87–100.

MSC 65D32

Quadrature Formulas with High Order Approximation

D.A. Silaev, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation, dasilaev@mail.ru

In the article the method of creation the quadrature formulas with high order approximation for a wide class of the areas is given. This method is based on approach of smooth function on the plane by the semilocal smoothing spline or S-spline. Semilocal smoothing splines are initiated by D.A. Silaev. Earlier the splines of the third and fifth degree are considered and applied. This work is devoted to use of S-splines of higher degrees. Steady S-splines of a class of C^0 (only continuous), consisting of polynoms of high degree of n ($n = 9{,}10$) makes it possible to receive quadrature formulas of the 10th and 11th orders of approximation. It is supposed that integrand function belongs to C^p class (to $p = 10{,}11$) in a bigger area, than initial area on which integration is conducted. It is also supposed that the border of area is set parametrically that helps to consider area border with a fine precision. Similar approach is possible for the construction of cubature formulas.

Keywords: an approximation; a spline; integrals; quadrature formulas; numerical methods.

References

1. Babenko K.I. *Osnovy chislennogo analiza* [Fundamentals of Numerical Analysis]. Moscow, Izhevsk, NITs Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika, 2002.
2. Sobolev S.L. *Vvedenie v teoriyu kubaturnykh formul* [Introduction to the Theory of Cubature Formulas]. Moscow, Nauka, 1974.

3. Mysovskikh I.P. *Interpolyatsionnye kubaturnye formuly* [Java Applet Formula]. Moscow, Nauka, 1981.
4. Krylov A.N. *Lektsii o priblizhennykh vychisleniyakh* [Lectures on Approximate Calculations]. Moscow, Leningrad, GITTL, 1950.
5. Stechkin S.B., Subbotin Yu.N. *Splayny v vychislitel'noy matematike* [Splines in Computational Mathematics]. Moscow, Nauka, 1976.
6. Zav'yalov Yu.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L. *Metody splayn-funktsiy* [Methods of Spline Functions]. Moscow, Nauka, 1980.
7. Kolmogorov A.N. *O predstavlenii nepreryvnykh funktsiy neskol'kikh peremennykh v vide superpozitsii funktsiy odnogo peremennogo i slozheniya* [On the Representation of Continuous Functions of Several Variables by Superposition of Functions of One Variable and Addition]. Moscow, Nauka, 1985.
8. Sobolev S.L., V.L. Vaskevich V.L. *Kubaturnye formuly* [Cubature Formula]. Novosibirsk, Izd-vo IM SO RAN, 1996.
9. Ramazanov M.D. *Teoriya reshetchatykh kubaturnykh formul s ogranichennym pogranichnym sloem* [The Theory of Lattice Rules with a Limited Boundary Layer]. Ufa, IMVTs UNTs RAN, 2009.
10. Silaev D.A., Korotaev D.O. Cubature Formulas of High-Order Methods for a Wide Range of Areas [O kubaturnykh formulakh vysokogo poryadka approksimatsii dlya shirokogo klassa oblastey]. *Sbornik trudov XVI mezhdunarodnoy konferentsii «Matematika. Komp'yuter. Obrazovanie»* [Proceedings Works of the XVI International Conference flqq Mathematics. Computer. Education»], Izhevsk, 2009, vol. 2, pp. 20–38.
11. Silaev D.A. Cubature Formulas of High-Order Methods for Arbitrary Domains [O kubaturnykh formulakh vysokogo poryadka approksimatsii dlya proizvol'nykh oblastey]. *Sbornik trudov mezhdunarodnoy konferentsii «Sovremennaya matematika i matematicheskoe obrazovanie, problemy istorii i filosofii matematiki»* [Proceedings Works International Conference «Contemporary Mathematics and Mathematics Education, the Problems of the History and Philosophy Mathematics»], Tambov, 2008, pp. 65–70.
12. Silaev D.A. Semilocal Smoothing $S-$ splines [Polulokal'nye sglazhivayushchie $S-$splayny]. *Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie* [Computer Research and Modelling], 2010, vol. 2, no. 4, pp. 349–358.
13. Silaev D.A., Yakushina G.I. S-Spline Approximation of Smooth Functions [Priblizhenie S-splaynami gladkikh funktsiy]. *Trudy seminara imeni I.G. Petrovskogo* [Proceedings of the Seminar Named I.G. Petrovsky], 1984, issue 10, pp. 197–206.
14. Silaev D.A., Korotaev D.O. S-Spline Lap [S-splayn na kruge]. *Tezisy mezhdunarodnoy konferentsii «Matematika. Komp'yuter. Obrazovanie»* [Proceedings of the International Conference «Mathematics. Computer. Education»], Pushchino, 2003, pp. 157.

Поступила в редакцию 6 июня 2013 г.