УДК 517.9 **DOI: 10.14529/mmp140212**

НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ХОФФА

Е.А. Солдатова

Линейная модель Хоффа, исследующая в линейном приближении динамику выпучивания двутавровых балок в конструкции, представляет собой множество линейных одномерных уравнений Хоффа, заданных на ребрах геометрического графа с условиями непрерывности и баланса потоков в его вершинах. Ранее детерминированная модель изучалась в разных аспектах многими специалистами. Стохастическая модель изучается впервые. В качестве метода исследования используется классический подход Ито – Стратоновича – Скорохода, распространенный на гильбертовы пространства и уравнения соболевского типа. Основной результат – теорема об однозначной разрешимости начально-конечной задачи с аддитивным белым шумом, под которым понимается обобщенная производная K-винеровского процесса. Решение представлено в виде формул, допускающих постановку вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: начально-конечное условие, линейные уравнения Хоффа; стохастические уравнения соболевского типа; геометрический граф; виннеровский процесс; аддитивный белый шум.

В [1] впервые было рассмотрено линейное стохастическое уравнение соболевского типа

$$Ldu = Mudt + NdW \tag{1}$$

с начальным условием Коши. Здесь операторы L, M, $N \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – вещественные сепарабельные гильбертовы пространства, а оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Между тем было отмечено, что для уравнений соболевского типа более «естественным» (по сравнению с условием Коши) являются другие начальные условия, например условие Шоуолтера – Сидорова [2]. В [3] впервые была рассмотрена начально-конечная задача, ошибочно названная «задачей Веригина». Впоследствии ошибка, дезориентирующая многих исследователей, была исправлена. Начально-конечное условие

$$P_{in}(u(0)-u_0) = P_{fin}(u(\tau)-u_\tau) = 0,\ \tau \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

где P_{in}, $P_{fin} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ – относительно спектральные проекторы, было использовано во множестве случаев, имеющих прикладное значение (см. обзор [4]), и даже было применено в теории оптимального управления [5]. Поскольку условие (2) приобретает все большую популярность [6], то предлагается впредь именовать его «условием Свиридюка – Загребиной» ради купирования возможной путаницы.

Пусть выполняется условие на L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M, гарантирующее существование проекторов P_{in} и P_{fin}

$$\begin{array}{l} \sigma^L(M) = \sigma^L_{fin}(M) \cup \sigma^L_{in}(M), \text{ причем } \sigma^L_{fin}(M) \text{ содержится в ограниченной области} \\ D \subset \mathbb{C} \text{ с кусочно гладкой границей } \gamma, \text{ причем } \gamma \cap \sigma^L(M) = \emptyset. \end{array} \tag{SZ}$$

Заметим, что $P_{in} + P_{fin} = P$ – единица разрешающей группы однородного уравнения (1). Кроме того, (SZ) гарантирует существование проекторов Q_{in}, $Q_{fin} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$, которые в сумме равны единице Q группы, порожденной однородным уравнением (1) на $\mathfrak{F}$.

В последнем слагаемом правой части (1) символом $W = W(t)$ обозначен $\mathfrak{F}$-значный K-винеровский процесс

$$W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\beta_k(t)\varphi_k,$$

$t \in \overline{\mathbb{R}_+}$, где $\{\beta_k(t)\}$ – последовательность независимых броуновских движений, $\{\lambda_k\}$ – последовательность собственных значений самосопряженного и положительно определенного ядерного оператора $K \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, занумерованных по невозрастанию с учетом их кратности, а $\{\varphi_k\}$ – последовательность собственных векторов.

В дальнейшем считаем оператор M $(L,0)$-ограниченным, а также выполненным условие

$$QN = N. \tag{$*$}$$

Следуя идеологии [1], [4], выпишем «мягкое решение» (mild solution) задачи (1), (2)

$$u(t) = U_{in}^{t}u_0 + S_{in}\int_0^t U_{in}^{t-s}L_{in}^{-1}Q_{in}NW(s)ds + L^{-1}QNW(t)+$$
$$+U_{fin}^{t-\tau} + S_{fin}\int_{\tau}^t U_{fin}^{t-s}L_{fin}^{-1}Q_{fin}NW(s)ds - L_{fin}^{-1}Q_{fin}NW(\tau).$$

Теорема 1. *Пусть оператор M $(L,0)$-ограничен и выполнены условия (SZ) и (*). Тогда для любых независимых друг от друга и от K-винеровского процесса W $\mathfrak{U}$-значных гауссовых случайных величин u_0 и u_τ существует единственное решение $u \in \mathbf{CL_2}$ задачи (1), (2).*

Пусть теперь $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}, \mathfrak{E})$ – конечный связный ориентированный граф, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ – множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_i\}$ – множество ребер, причем каждое ребро E_j имеет длину $l_j \in \mathbb{R}_+$ и площадь поперечного сечения $d_j \in \mathbb{R}_+$. В вершинах $\mathfrak{V}$ графа $\mathbf{G}$ зададим условия «непрерывности» и «баланса потока» соответственно

$$u_j(0,t) = u_k(0,t) = u_m(l_m,t) = u_n(l_n,t), E_j, E_k \in E^{\alpha}(V_i), E_m, E_n \in E^{\omega}(V_i), \tag{3}$$

$$\sum_{j:E_j\in E^{\alpha}(V_i)} d_j u_{jx}(0,t) - \sum_{k:E_k\in E^{\omega}(V_i)} d_k u_{kx}(l_k,t) = 0, \tag{4}$$

где через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество ребер с началом (концом) в вершине V_i, $t \in \mathbb{R}$. Если граф состоит из одного нециклического ребра (т.е. вершин у графа две), то условие (3) отсутствует, а условие (4) превращается в условие Неймана. Если же ребро циклическое (т.е. вершина у графа одна), то условия (3), (4) превращаются в условия согласования. Заметим еще, что в контексте условий (3), (4) «отсутствовать» не значит «быть равным нулю». Например, если в вершину V_i все ребра «входят», то первые два равенства в (3) и уменьшаемое в (4) именно «отсутствуют», а не равны нулю.

Теперь на графе $\mathbf{G}$ с условиями (3), (4) рассмотрим линейную стохастическую модель Хоффа

$$\lambda du_j + du_{jxx} = \alpha u_j dt + N_j dW_j, \tag{5}$$

описывающую динамику выпучивания двутавровых балок, находящихся под постоянной нагрузкой в конструкции со случайным внешним воздействием. Здесь случайный процесс $u_j = u_j(x,t)$, $(x,t) \in (a,b) \times \mathbb{R}$, характеризует отклонение j-той балки от положения равновесия; параметры $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}$ характеризуют нагрузку и свойства материала балок, $dW_j = dW_j(t)$ отвечает случайной нагрузке на j-ю балку (аддитивный белый шум).

Чтобы редуцировать (3) – (5) к (1), введем в рассмотрение гильбертово пространство $\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, \ldots, u_j, \ldots) : u_j \in W_2^1(0, l_j),$ и выполнено (3)$\}$ со скалярным произведением $\langle u, v\rangle = \sum\limits_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} (u_{jx}v_{jx} + u_j v_j)dx$. Затем построим еще одно гильбертово пространство $\mathbf{L_2}(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, \ldots, g_i, \ldots) : g_i \in L_2(0, l_j)\}$. со скалярным произведением $(g, h) = \sum\limits_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} g_j h_j dx$, причем заметим плотность и непрерывность (даже компактность) вложения $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathbf{L_2}(\mathbf{G})$. Отождествим $\mathbf{L_2}(\mathbf{G})$ со своим сопряженным, и через $\mathfrak{F}$ обозначим сопряженное относительно двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$ пространство к $\mathfrak{U}$. Очевидно, $\mathfrak{F}$ – гильбертово пространство, причем вложение $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$ компактно.

Фиксируем $a \in \mathbb{R}_+$ и формулой $\langle Au, v\rangle = \sum\limits_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} (u_{jx}v_{jx} - a u_j v_j)dx$ определим оператор $A : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$. Поскольку $c_1\|u\|^2_{\mathfrak{U}} \leq \langle Au, u\rangle \leq c_2\|u\|^2_{\mathfrak{U}}$ при всех $u \in \mathfrak{U}$ и некоторых $c_k \in \mathbb{R}_+,\ k = 1, 2$, то линейный оператор $A : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ биективен и непрерывен. Отсюда по теореме Банаха следует существование оператора $A^{-1} : \mathfrak{F} \to \mathfrak{U}$. Поскольку вложение $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$ компактно, то оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ является компактным. Значит, спектр оператора A вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $+\infty$. Более того, $\langle Au, u\rangle \geq \mathrm{const}||u||^2_{\mathfrak{U}}$, где $||\cdot||_{\mathfrak{U}}$ – норма пространства $\mathfrak{U}$. Отсюда следует, что спектр $\sigma(A) \subset \mathbb{R}_+$. Наконец, фиксируем α, $\lambda \in \mathbb{R}$ и построим операторы $L = (\lambda - a)\mathbb{I} + A$, $M = \alpha(a\mathbb{I} + A)$. Справедлива

Лемма 1. *(i) При любых α, $\lambda \in \mathbb{R}$ операторы L, $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, причем спектр $\sigma(L)$ оператора L вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $+\infty$.*

(ii) При любых α, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор M $(L, 0)$-ограничен.

Пусть $\{\nu_k\}$ – собственные значения оператора L, занумерованные по невозрастанию с учетом их кратности; а $\{\varphi_k\}$ – соответствующие им ортонормированные в смысле $\mathbf{L_2}(\mathbf{G})$ функции. Построим проекторы и разрешающую группу задачи (3) – (5) соответственно

$$P = \begin{cases} \mathbb{I}, \text{ если } 0 \notin \sigma(L); \\ \mathbb{I} - \sum\limits_{\nu_k = \lambda - a} (\,\cdot\,, \varphi_k)\varphi_k, \text{ если } 0 \in \sigma(L); \end{cases} \qquad Q = \begin{cases} \mathbb{I}, \text{ если } 0 \notin \sigma(L); \\ \mathbb{I} - \sum\limits_{\lambda_k = \lambda - a} (\,\cdot\,, \varphi_k)\varphi_k, \text{ если } 0 \in \sigma(L); \end{cases}$$

$$U^t = \sum_{k=1}^{\infty}{}' e^{\mu_k t}(\,\cdot\,, \varphi_k)\varphi_k, \tag{6}$$

где штрих у знака суммы означает отсутствие членов ряда с номерами k такими, что $\nu_k = \lambda + a$. (Заметим, что, несмотря на «похожесть», проекторы P и Q определены на разных пространствах).

Теперь у нас все готово для определения свободного члена в правой части уравнения (1) по правым частям уравнений (5). Вернемся к оператору A, и в качестве оператора K возьмем оператор Грина A^{-1}. Его собственные значения $\lambda_k = (\nu_k - a)^{-1}$, занумерованные по невозрастанию, сходятся к точке нуль. Асимптотическое поведение собственных чисел $\{\nu_k - a\}$ оператора A изучено плохо, поэтому мы нуждаемся в гипотезе

$$\nu_k \sim k^2 \text{ при } k \to \infty, \tag{7}$$

которая заведомо выполняется, если граф $\mathbf{G}$ представляет собой цепочку последовательно соединенных ребер. Считая, что (7) выполнено, заключаем, что K – ядерный оператор.

Наконец, построим K-винеровский процесс

$$W(t) = \sum_{k=1}^{\infty}{}' \sqrt{\lambda_k}\beta_k(t)\varphi_k, \tag{8}$$

где штрих означает то же самое, что и в (6). В силу леммы 1 существование этого штриха гарантирует выполнение (*).

Стало быть, все символы абстрактного решения определены и значит, справедлива

Теорема 2. *Пусть α, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда для любой $\mathfrak{U}$-значной случайной величины u_0, независимой от K-винеровского процесса (8) существует единственное мягкое решение задачи (2) – (5).*

В заключение объясним свободные члены уравнения (5). По построению пространство $\mathbf{L_2(G)}$ является конечной прямой суммой попарно ортогональных подпространств. Обозначим через Π_j ортопроектор на j-ое подпространство. Так вот, $W_j = \Pi_j W$, где $W = W(t)$ (8).

Литература

1. Загребина С.А. Линейные уравнения соболевского типа с относительно p-ограниченными операторами и аддитивным белым шумом / С.А. Загребина, Е.А. Солдатова // Известия Иркутского государственного университетата. Серия: Математика. – 2013. – Т.6, №1. – С. 20–34.

2. Свиридюк Г.А., Загребина С.А. Задача Шоуолтера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутского государственного университетата. Серия: Математика. – 2010. – Т.3, №1. – С. 104–125.

3. Свиридюк Г.А. Задача Веригина для линейных уравнений соболевского типа с относительно p-секториальными операторами / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т.38, №12. – С. 1646–1652.

4. Загребина С.А. Начально-конечные задачи для неклассических моделей математической физики / С.А. Загребина // Вестник Южно-Уральского государственного университетата. Серия: Математическое моделирование и программирование. – Челябинск, 2013. – Т.6, №2. – С. 5–24.

5. Манакова Н.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для линейной модели Хоффа / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Математические заметки. – 2013. – Т.94, №2. – С. 225-Ц236.

6. Замышляева А.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для уравнения Буссинеска – Лява / А.А. Замышляева, О.Н. Цыпленкова // Вестник Южно-Уральского государственного университетата. Серия: Математическое моделирование и программирование. – Челябинск, 2012. – №5 (264), вып. 11. – С. 13–24.

Екатерина Александровна Солдатова, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), Soldatova.Katerina@gmail.ru.

Поступила в редакцию 17 марта 2014 г.

**Bulletin of the South Ural State University.
Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software",
2014, vol. 7, no. 2, pp. 124–128.**

MSC 35K70, 60H30 **DOI: 10.14529/mmp140212**

The Initial-Final Value Problem for the Linear Stochastic Hoff Model

E.A. Soldatova, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, Soldatova.Katerina@gmail.ru.

The stochastic linear Hoff model of buckling of I-beam constructions amounts to a set of linear one-dimensional Hoff equations defined on the edges of a geometric graph with continuity and balance-of-flows conditions at its vertices. The deterministic model has been studied in various aspects by many mathematicians. We study the stochastic model for the first time. Our tool is the classical Ito – Stratonovich – Skorokhod approach extended to Hilbert spaces and Sobolev-type equations. The main result is an existence and uniqueness theorem for solutions to the initial-final value problem with additive white noise, understood as the generalized derivative of the K-Wiener process. The formulas expressing the solution are suitable for computer simulations.

Keywords: initial-final value problem; linear Hoff equations; stochastic Sobolev-type equations; geometric graph; Wiener process; additive white noise.

References

1. Zagrebina S.A., Soldatova E.A. The Linear Sobolev-Type Equations with Relatively p-Bounded Operators and Additive White Noise. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series "Mathematics"*, 2013, vol. 6, no. 1, pp. 20–34. (in Russian).
2. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. The Showalter – Sidorov Problem as Phenomena of the Sobolev-Type Equations. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series "Mathematics"*, 2010, vol. 3, no. 1, pp. 51–72. (in Russian).
3. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. Verigin's Problem for Linear Equations of the Sobolev Type with Relatively p-Sectorial Operators. *Differential Equations*, 2002, vol. 38, no. 12, pp. 1745–1752. DOI: 10.1023/A:1023812213901
4. Zagrebina S. A. The Initial-Finite Problems for Nonclassical Models of Mathematical Physics. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, 2013, vol. 6, issue 2, pp. 5–24. (in Russian)
5. Manakova N.A., Dylkov A. G. Optimal Control of the Solutions of the Initial-Finish Problem for the Linear Hoff Model. *Mathematical Notes*, 2013, vol. 94, issue 2, pp. 220–230. DOI: 10.1134/S0001434613070225
6. Zamyshlyaeva A.A., Tsyplenkova O.N. The Optimal Control over Solutions of the Initial-finish Value Problem for the Boussinesque–Löve Equation *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2012, vol. 5 (264), issue 11, pp. 13–24. (in Russian)

Received March 17, 2014