

## МЕТОД С.К. ГОДУНОВА ДЛЯ МНОГОСКОРОСТНОЙ МОДЕЛИ ГЕТЕРОГЕННОЙ СРЕДЫ

*В.С. Суров, И.В. Березанский*

В настоящей работе используется гиперболическая модель, в которой введено в рассмотрение такое состояние среды как смесь в целом, характеризующаяся осредненными значениями величин, уравнения для которых совпадают с газодинамическими. К этим соотношениям добавляются уравнения, выражающие законы сохранения, но только для тех компонентов смеси, в которых локальные скорости перемещения возмущений не превышают скорость движения волны в смеси в целом. При этом считалось, что остальные волны поглощаются средой, формируя волну в смеси. Поскольку система уравнений модели не является полностью дивергентной, применение оригинального метода С.К. Годунова для интегрирования уравнений многоскоростной гетерогенной среды невозможно. В представленной работе описан модифицированный МГ, предназначенный для интегрирования не дивергентной системы уравнений, описывающей течение многоскоростной гетерогенной смеси. При расчете задач Римана использован линеаризованный римановский решатель.

*Ключевые слова:* многоскоростная многокомпонентная гетерогенная среда; гиперболические системы не дивергентного вида; модифицированный метод Годунова; линеаризованный римановский решатель, численное моделирование.

### Введение

Ранние модели гетерогенных сред не являлись гиперболическими, что приводило при их использовании к появлению различного рода нефизических эффектов, связанных, например, с наличием волн, распространяющихся с бесконечно большими скоростями. Кроме того, для этих моделей, описывающих течение гетерогенных сред, задача Коши не всегда оказывалась корректной, что затрудняло применение численных методов [1]. Поэтому дальнейшее развитие получили гиперболические модели гетерогенных сред. Обзор наиболее часто используемых гиперболических моделей имеется в [2].

В настоящей работе используется гиперболическая модель из работы [3], в которой введено в рассмотрение такое состояние среды как смесь в целом, характеризующаяся осредненными значениями величин, уравнения для которых совпадают с газодинамическими. К этим соотношениям добавляются уравнения, выражающие законы сохранения, но только для тех компонентов смеси, в которых локальные скорости перемещения возмущений не превышают скорость движения волны в смеси в целом. При этом считалось, что остальные волны поглощаются средой, формируя волну в смеси. Давление полагалось общим для всех фракций смеси. Для газожидкостных смесей модель с газодинамическим ядром из [3] описывает «пузырьковое» течение, и оно полностью соответствует наблюдаемому в экспериментах (см. [2]).

Метод С.К. Годунова (МГ) [4], широко используемый для решения газодинамических задач, предназначен для численного интегрирования гиперболических систем уравнений, записанных в дивергентной форме. Применение оригинального МГ для интегрирования уравнений многоскоростной гетерогенной среды невозможно, поскольку система определяющих уравнений модели [3] не является полностью дивергентной. В представленной работе описан модифицированный МГ, позволяющий численно решить систему уравнений модели

гетерогенной среды с газодинамическим ядром из [3] недивергентного вида. Отметим, что ранее МГ успешно использовался для расчета течений, описываемых различными моделями гетерогенных сред в рамках односкоростного приближения. В частности, в работе [5] МГ с точным римановским решателем из [6] использовался при исследовании ударно-волновых процессов во вспененных жидкостях в рамках условно гиперболической модели. В работе [7] описан модифицированный МГ, предназначенный для интегрирования уравнений гиперболической модели односкоростной гетерогенной среды из [8]. Для этой модели среды точный решатель Римана, используемый в алгоритме метода, представлен в работе [9], а приближенный – в [10].

Поведение сжимаемых фракций для определенности будем описывать с помощью двухчленного уравнения состояния

$$\varepsilon_i = \frac{p - c_{*i}^2 (\rho_i^0 - \rho_{*i})}{\rho_i^0 (\gamma_i - 1)} = \frac{b_i + pB_i}{\rho_i^0} - d_i, \quad (1)$$

где  $\varepsilon$  – удельная внутренняя энергия,  $\rho_i^0$  – истинная плотность  $i$ -й фракции,  $B_i = 1/(\gamma_i - 1)$ ,  $d_i = c_{*i}^2 B_i$ ,  $b_i = d_i \rho_{*i}$  ( $\gamma_i$ ,  $\rho_{*i}$ ,  $c_{*i}$  – константы, индивидуализирующие  $i$ -ю фракцию). В частности, для воды –  $\gamma = 5.59$ ,  $c_* = 1500$  м/с,  $\rho_* = 1000$  кг/м<sup>3</sup>.

При рассмотрении алгоритма МГ ограничимся одномерным приближением. Используемый подход непосредственно обобщается на многомерный случай.

## 1. Модель гетерогенной среды

Система уравнений  $n$ -компонентной смеси с первыми  $m$  сжимаемыми фракциями, описывающая одномерное течение многоскоростной гетерогенной среды из [3], включает в себя уравнения законов сохранения массы, импульса и энергии для смеси в целом

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (p + \rho u^2)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} - c^2 \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = 0, \quad (2)$$

где  $c$  – скорость перемещения волны в смеси в целом,  $e = \varepsilon + \frac{1}{2}u^2$  – удельная полная энергия смеси,  $p$  – давление,  $u$  – скорость смеси,  $\rho$  – плотность смеси.

Для сжимаемых фракций имеем  $3(m - 1)$  законов сохранения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_i \rho_i^0}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_i \rho_i^0 u_i}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial \alpha_i \rho_i^0 u_i}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_i (p + \rho_i^0 u_i^2)}{\partial x} &= \eta_i (u - u_i), \\ \frac{\partial \alpha_i \rho_i^0 e_i}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_i \rho_i^0 e_i u_i}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i p u_i}{\partial x} &= \eta_i u_i (u - u_i), \quad i = 1, \dots, m - 1, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\alpha_i$  – объемная доля  $i$ -й фракции.

Для несжимаемых компонентов справедливы  $2(n - m)$  выражений

$$\frac{\partial \alpha_j}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_j u_j}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \alpha_j u_j}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_j (u_j^2 + p \rho_j^0)}{\partial x} = \frac{\eta_j (u - u_j)}{\rho_j^0}, \quad j = m + 1, \dots, n, \quad (4)$$

представляющие собой законы сохранения массы и импульса.

При записи уравнений (3) для определенности полагалось, что скорость возмущений в  $m$ -й фракции превосходит  $c$ , поэтому законы сохранения для этой составляющей опущены. При расчете сил сопротивления предполагалось, что они пропорциональны разнице скоростей смеси в целом и отдельного компонента. При вычислении скорости волны в смеси в

целом использовалась формула обобщенно-равновесной модели, которая в случае применения двучленного уравнения состояния (1) принимает вид

$$c = \sqrt{\rho^{-1} \left[ B_m + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\alpha_i (b_m B_i - b_i B_m)}{b_i + p B_i} \right]^{-1} \left\{ b_m + p \left[ 1 + B_m - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\alpha_i (b_{im} + p B_{im})}{b_i + p B_i} \right] \right\}}, \quad (5)$$

где  $b_{im} = b_i - b_m$ ,  $B_{im} = B_i - B_m$ . Скорость  $c$  из выражения (5) близка к рассчитанной по аппроксимирующей экспериментальные данные формуле Вуда (6) [11].

$$\frac{1}{\rho c^2} = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{\rho_k^0 c_k^2}. \quad (6)$$

Перепишем систему уравнений (2) – (4) в квазилинейной форме как

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial \rho_i^0}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho_i^0}{\partial x} - H_i \frac{\partial u}{\partial x} - K_i \frac{\partial p}{\partial x} - L_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{1}{\rho_i^0} \frac{\partial p}{\partial x} + G_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} = \frac{\eta_i}{\alpha_i \rho_i^0} (u - u_i), \\ \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} + \frac{\alpha_i H_i}{\rho_i^0} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\alpha_i K_i}{\rho_i^0} \frac{\partial p}{\partial x} + \alpha_i \left( 1 + \frac{L_i}{\rho_i^0} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, \dots, m-1; \\ \frac{\partial u_j}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{1}{\rho_j^0} \frac{\partial p}{\partial x} + G_j \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} = \frac{\eta_j}{\alpha_j \rho_j^0} (u - u_j), \\ \frac{\partial \alpha_j}{\partial t} + u_j \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} + \alpha_j \frac{\partial u_j}{\partial x} = 0, \quad j = m+1, \dots, n, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} H_i = \frac{\rho c^2 \rho_i^0 E_i}{\alpha_i G_i + \rho_i^0 F_i}, \quad K_i = \frac{(u - u_i) \rho_i^0 E_i}{\alpha_i G_i + \rho_i^0 F_i}, \quad L_i = -\frac{\alpha_i \rho_i^0 G_i}{\alpha_i G_i + \rho_i^0 F_i}, \quad E_i = \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial p} = \frac{B_i}{\rho_i^0}, \\ F_i = \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \rho_i^0} - \frac{p}{(\rho_i^0)^2} = -\frac{b_i + p(1 + B_i)}{(\rho_i^0)^2}, \quad G_i = \frac{p}{\alpha_i \rho_i^0}. \end{aligned}$$

Систему (7) можно представить в векторном виде как

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{Y} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{S}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{U} = \left( \rho, u, p, [\rho_i^0, u_i, \alpha_i]_{i=1}^{m-1}, [u_j, \alpha_j]_{j=m+1}^n \right)', \\ \mathbf{S} = \left( 0, 0, 0, \left[ 0, \frac{\eta_i (u - u_i)}{\alpha_i \rho_i^0}, 0 \right]_{i=1}^{m-1}, \left[ \frac{\eta_j (u - u_j)}{\alpha_j \rho_j^0}, 0 \right]_{j=m+1}^n \right)', \end{aligned}$$

а матрица  $Y$  примет вид

$$\begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \rho c^2 & u & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -H_1 & -K_1 & u_1 & -L_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho_1^0} & 0 & u_1 & G_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_1 H_1}{\rho_1^0} & \frac{\alpha_1 K_1}{\rho_1^0} & 0 & \frac{c_1^2}{G_1} & u_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -H_{m-1} & -K_{m-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & u_{m-1} & -L_{m-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho_{m-1}^0} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & u_{m-1} & G_{m-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_{m-1} H_{m-1}}{\rho_{m-1}^0} & \frac{\alpha_{m-1} K_{m-1}}{\rho_{m-1}^0} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{c_{m-1}^2}{G_{m-1}} & u_{m-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho_{m+1}^0} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & u_{m+1} & G_{m+1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \alpha_{m+1} & u_{m+1} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho_n^0} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & u_n & G_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n & u_n \end{pmatrix}.$$

Штрихом отмечен оператор транспонирования.

Матрица  $Y$  имеет только действительные собственные значения, которые равны

$$u \pm c, \quad u, \quad u_1 \pm c_1, \quad u_1, \quad \dots, \quad u_{m-1} \pm c_{m-1}, \quad u_{m-1}, \quad u_{m+1} \pm c_{m+1}, \quad \dots, \quad u_n \pm c_n,$$

где

$$c_i = \sqrt{\frac{pF_i}{\alpha_i G_i + \rho_i^0 F_i}}, \quad i = 1, \dots, m-1; \quad c_j = \sqrt{\frac{p}{\rho_j^0}}, \quad j = m+1, \dots, n.$$

Кроме того, собственные векторы, соответствующие собственным значениям, линейно независимы, поэтому система уравнений модели относится к гиперболическому типу.

## 2. Метод Годунова для недивергентных систем

Систему (2) – (4) перепишем в векторной квазидивергентной форме

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + (\rho c^2 - p) \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} = \mathbf{S}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \left( \rho, \rho u, p, [\alpha_i \rho_i^0, \alpha_i \rho_i^0 u_i, \alpha_i \rho_i^0 e_i]_{i=1}^{m-1}, [\alpha_j, \alpha_j u_j]_{j=m+1}^n \right)', \\ \mathbf{F} &= \left( \rho u, p + \rho u^2, \rho u, [\alpha_i \rho_i^0 u_i, \alpha_i (p + \rho_i^0 u_i^2), u_i (\alpha_i p + \rho_i e_i)]_{i=1}^{m-1}, [\alpha_j u_j, \alpha_j (u_j^2 + p \rho_j^0)]_{j=m+1}^n \right)', \\ \mathbf{G} &= (0, 0, u, 0, \dots, 0)', \\ \mathbf{S} &= \left( 0, 0, 0, [0, \eta_i (u - u_i), \eta_i u_i (u - u_i)]_{i=1}^{m-1}, \left[ 0, \frac{\eta_j (u - u_j)}{\rho_j^0} \right]_{j=m+1}^n \right)'. \end{aligned}$$

Переходя от дифференциальных соотношений в (9) к конечно-разностным, получим следующее явное выражение, связывающее искомые параметры на новом временном слое  $t + \Delta t$  (с индексами сверху) с соответствующими значениями на предыдущем слое  $t$  (с индексами внизу):

$$\frac{\mathbf{W}^k - \mathbf{W}_k}{\Delta t} + \frac{\mathbf{F}_{k+1/2} - \mathbf{F}_{k-1/2}}{\Delta x} + (\rho c^2 - p)_k \frac{\mathbf{G}_{k+1/2} - \mathbf{G}_{k-1/2}}{\Delta x} = \mathbf{S}_k, \quad (10)$$

где  $\mathbf{F}_{k\pm 1/2} = \left( RU, P + RU^2, PU, \right.$

$$\left. [A_i R_i^0 U_i, A_i (P + R_i^0 U_i^2), A_i U_i (P + R_i^0 E_i)]_{i=1}^{m-1}, \left[ A_j U_j, A_j \left( U_j^2 + \frac{P}{R_j^0} \right) \right]_{j=m+1}^n \right)_{k\pm 1/2},$$

$$\mathbf{G}_{k\pm 1/2} = (0, 0, U, 0, \dots, 0)_{k\pm 1/2}.$$

Используемые в (10) обозначения соответствуют принятым в [4]: узлы конечноразностной сетки имеют целые индексы, а грани ячеек – полуцелые. «Большие» величины, которые входят в выражения (10) ( $P$  – давление;  $U, U_i, U_j$  – скорости,  $R$  – плотность смеси;  $R_i^0$  и  $E_i$  – плотность и удельная полная энергия  $i$ -й составляющей смеси;  $A_i, A_j$  – объемные доли), относящиеся к граням смежных ячеек, определяются из решения соответствующих задач Римана, алгоритм для расчета которых приведен ниже.

Другой способ интегрирования не дивергентной системы (2) – (4) связан, как и в предыдущем случае, с выделением уравнений, приводящихся к дивергентному виду, для которых выписываются явные выражения, связывающие искомые параметры на новом временном слое  $t + \Delta t$  (с индексами вверху) с соответствующими значениями на предыдущем слое  $t$  (с индексами внизу):

$$\begin{aligned} \rho^k &= \rho_k + [(RU)_{k-1/2} - (RU)_{k+1/2}] \frac{\Delta t}{\Delta x}, \\ (\rho u)^k &= (\rho u)_k + [(P + RU^2)_{k-1/2} - (P + RU^2)_{k+1/2}] \frac{\Delta t}{\Delta x}, \\ (\alpha_i \rho_i^0)^k &= (\alpha_i \rho_i^0)_k + [(A_i R_i^0 U)_{k-1/2} - (A_i R_i^0 U)_{k+1/2}] \frac{\Delta t}{\Delta x}; \\ (\alpha_i \rho_i^0 u_i)^k &= (\alpha_i \rho_i^0 u_i)_k + \left\{ (A_i P + A_i R_i^0 U_i^2)_{k-1/2} - (A_i P + A_i R_i^0 U_i^2)_{k+1/2} \right\} \frac{\Delta t}{\Delta x} + \\ &\quad + [\eta_i (u - u_i)]_k \Delta t, \\ (\alpha_i \rho_i^0 e_i)^k &= (\alpha_i \rho_i^0 e_i)_k + \left\{ [(R_i^0 E_i + P_i) A_i U_i]_{k-1/2} - [(R_i^0 E_i + P_i) A_i U_i]_{k+1/2} \right\} \frac{\Delta t}{\Delta x} + \\ &\quad + [\eta_i u_i (u - u_i)]_k \Delta t, \quad i = 1, \dots, m - 1; \\ (\alpha_j)^k &= (\alpha_j)_k + [(A_j U_j)_{k-1/2} - (A_j U_j)_{k+1/2}] \frac{\Delta t}{\Delta x}, \\ (\alpha_j u_j)^k &= (\alpha_j u_j)_k + \left\{ \left[ A_j \left( U_j^2 + \frac{P}{\rho_j^0} \right) \right]_{k-1/2} - \left[ A_j \left( U_j^2 + \frac{P}{\rho_j^0} \right) \right]_{k+1/2} \right\} \frac{\Delta t}{\Delta x} + \\ &\quad + \left[ \frac{\eta_j (u - u_j)}{\rho_j^0} \right]_k \Delta t, \quad j = m + 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (11)$$

Используемые в (11) обозначения соответствуют принятым в [4].

Для вычисления оставшейся неизвестной переменной  $p$  на новом временном слое запишем в конечно-разностном виде третье уравнение (2), используя противопоточную схему, как

$$\frac{p^k - p_k}{\Delta t} + u_k^- \frac{p_{k+1} - p_k}{\Delta x} + u_k^+ \frac{p_k - p_{k-1}}{\Delta x} - c_k^2 \left( \frac{\rho^k - \rho_k}{\Delta t} + u_k^- \frac{\rho_{k+1} - \rho_k}{\Delta x} + u_k^+ \frac{\rho_k - \rho_{k-1}}{\Delta x} \right) = 0, \quad (12)$$

где

$$u_k^+ = \frac{1}{2}(u_k + |u_k|), \quad u_k^- = \frac{1}{2}(u_k - |u_k|).$$

Из уравнения (12) вычисляется давление  $p^k$ , что завершает вычислительный цикл. Отметим, что ранее подобный подход показал свою эффективность в расчетах течений односкоростной гетерогенной среды (см. [7]).

### 3. Линеаризованный римановский решатель

Задача Римана для гетерогенной среды формулируется следующим образом. Пусть имеются две однородные многокомпонентные массы среды, состоящие из  $n_L$  и  $n_R$  составляющих каждая, расположенные в начальный момент  $t = 0$  соответственно «слева» от плоскости  $x = 0$  и «справа» от нее. Необходимо рассчитать течение, возникающее при  $t > 0$ . «Точный» решатель задачи Римана для модели из [3] приведен в [12], применение которого требует значительных временных затрат. Существует ряд «быстрых» способов приближенного решения задачи Римана для сред, описываемых системами гиперболических уравнений. Это решатели Роя, Хартена – Лакса – ван Лиры (HLL, HLLC), Лакса – Фридрихса, Русанова и др. [13, 14], предназначенные в основном для дивергентных систем. В этом разделе описан алгоритм линеаризованного римановского решателя (LRR) [15] для модели среды с газодинамическим ядром.

При описании римановского решателя для определенности ограничимся газожидкостной смесью, состоящей из двух сжимаемых сред – газа, параметры которого отмечены индексом  $g$ , и жидкости (с индексом  $l$ ). В этом случае система дифференциальных уравнений (2) – (4) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} - c^2 \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = 0, \\ \frac{\partial \rho_l^0}{\partial t} + u_l \frac{\partial \rho_l^0}{\partial x} - H_l \frac{\partial u}{\partial x} - K_l \frac{\partial p}{\partial x} - L_l \frac{\partial u_l}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u_l}{\partial t} + u_l \frac{\partial u_l}{\partial x} + \frac{1}{\rho_l^0} \frac{\partial p}{\partial x} + G_l \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} = \frac{\eta_l}{\alpha_l \rho_l^0} (u - u_l) \equiv S, \\ \frac{\partial \alpha_l}{\partial t} + u_l \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} + \frac{\alpha_l H_l}{\rho_l^0} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\alpha_l K_l}{\rho_l^0} \frac{\partial p}{\partial x} + \alpha_l \left( 1 + \frac{L_l}{\rho_l^0} \right) \frac{\partial u_l}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} H_l = \frac{\rho c^2 \rho_l^0 E_l}{\alpha_l G_l + \rho_l^0 F_l}, \quad K_l = \frac{(u - u_l) \rho_l^0 E_l}{\alpha_l G_l + \rho_l^0 F_l}, \quad L_l = -\frac{\alpha_l \rho_l^0 G_l}{\alpha_l G_l + \rho_l^0 F_l}, \\ E_l = \frac{B_l}{\rho_l^0}, \quad F_l = -\frac{b_l + p(1 + B_l)}{(\rho_l^0)^2}, \quad G_l = \frac{p}{\alpha_l \rho_l^0}, \quad c_l = \sqrt{\frac{p F_l}{\alpha_l G_l + \rho_l^0 F_l}}, \\ G_g = \frac{p}{\alpha_g \rho_g^0}, \quad F_g = -\frac{b_g + p(1 + B_g)}{(\rho_g^0)^2}, \quad c_g = \sqrt{\frac{p F_g}{\alpha_g G_g + \rho_g^0 F_g}}, \\ c = \sqrt{\rho^{-1} \left[ B_g + \frac{\alpha_l (b_g B_l - b_l B_g)}{b_l + p B_l} \right]^{-1} \left\{ b_g + p \left[ 1 + B_g - \frac{\alpha_l (b_l g + p B_l g)}{b_l + p B_l} \right] \right\}}, \\ b_l g = b_l - b_g, \quad B_l g = B_l - B_g. \end{aligned}$$

Поскольку скорость перемещения возмущений  $c_g$  превосходит скорость движения волны в смеси в целом, поэтому уравнения для газовой фракции не включены в общую систему уравнений.

Формула линеаризованного римановского решателя, с использованием которого вычисляются параметры смеси на контактной границе ( $\mathbf{U}_C$ ) по известным значениям параметров

среды слева ( $\mathbf{U}_L$ ) и справа ( $\mathbf{U}_R$ ) от нее, имеет вид (см. [15]):

$$\mathbf{U}_C = \mathbf{U} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 a_k \text{sign}(\lambda_k) \mathbf{R}_k. \quad (14)$$

В (14) введены обозначения

$$\mathbf{U}_C = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \\ \rho_l \\ u_l \\ \alpha_l \end{pmatrix}_C, \quad \mathbf{U} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}_L + \mathbf{U}_R), \quad \mathbf{U}_L = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \\ \rho_l \\ u_l \\ \alpha_l \end{pmatrix}_L, \quad \mathbf{U}_R = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \\ \rho_l \\ u_l \\ \alpha_l \end{pmatrix}_R.$$

Правые собственные векторы  $\mathbf{R}_k$  системы (13), соответствующие корням характеристического уравнения  $\lambda_1 = u$ ,  $\lambda_2 = u_l$ ,  $\lambda_3 = u_l - c_l$ ,  $\lambda_4 = u_l + c_l$ ,  $\lambda_5 = u - c$ ,  $\lambda_6 = u + c$ , имеют вид

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{L_l}{c_l} \\ 1 \\ -\frac{c_l}{G_l} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{c_l}{L_l} \\ -\frac{c_l^2}{L_l G_l} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_5 = \begin{pmatrix} -\frac{\rho}{c} \\ 1 \\ -\rho c \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_6 = \begin{pmatrix} \frac{\rho}{c} \\ 1 \\ \rho c \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{pmatrix},$$

где

$$Q_1 = -\frac{\rho_l (H_l - \rho c K_l) [(u - c - u_l)^2 - c_l^2] + L_l [\alpha_l G_l H_l + \rho c (u_l - u + c - \alpha_l G_l K_l)]}{\rho_l^0 (u - c - u_l) [(u - c)^2 + u_l^2 - c_l^2 - 2u_l(u - c)]},$$

$$Q_2 = \frac{\alpha_l G_l H_l + \rho c (u_l - u + c - \alpha_l G_l K_l)}{\rho_l^0 [(u - c)^2 + u_l^2 - c_l^2 - 2u_l(u - c)]}, \quad Q_3 = \frac{\alpha_l G_l (u - u_l - c) (H_l - \rho c K_l) - \rho c c_l^2}{\rho_l^0 G_l [(u - c)^2 + u_l^2 - c_l^2 - 2u_l(u - c)]},$$

$$Q_4 = -\frac{\rho_l (H_l + \rho c K_l) [(u + c - u_l)^2 - c_l^2] + L_l [\alpha_l G_l H_l + \rho c (u + c - u_l - \alpha_l G_l K_l)]}{\rho_l^0 (u + c - u_l) [(u + c)^2 + u_l^2 - c_l^2 - 2u_l(u + c)]},$$

$$Q_5 = \frac{\alpha_l G_l H_l + \rho c (u - u_l + c + \alpha_l G_l K_l)}{\rho_l^0 [(u + c)^2 + u_l^2 - c_l^2 - 2u_l(u + c)]}, \quad Q_6 = \frac{\alpha_l G_l (u - u_l + c) (H_l + \rho c K_l) + \rho c c_l^2}{\rho_l^0 G_l [(u + c)^2 + u_l^2 - c_l^2 - 2u_l(u + c)]}.$$

Значения констант  $a_1, \dots, a_6$ , которые входят в (14), определяются из выражений

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \Delta\rho - \frac{1}{c^2}\Delta p, \\
 a_2 &= \Delta\rho_l^0 + \frac{L_l G_l}{c_l^2} \Delta\alpha_l - \frac{\Delta p}{2\rho c} \left[ Q_4 - Q_1 + \frac{L_l G_l}{c_l^2} (Q_6 - Q_3) \right] - \frac{\Delta u}{2} \left[ Q_4 + Q_1 + \frac{L_l G_l}{c_l^2} (Q_6 + Q_3) \right], \\
 a_3 &= \frac{1}{2} \left( \Delta u_l - \frac{G_l}{c_l} \Delta\alpha_l \right) + \frac{\Delta p}{4\rho c} \left[ Q_2 - Q_5 + \frac{G_l}{c_l} (Q_6 - Q_3) \right] - \frac{\Delta u}{4} \left[ Q_2 + Q_5 - \frac{G_l}{c_l} (Q_6 + Q_3) \right], \\
 a_4 &= \frac{L_l}{2c_l} \left\{ -\Delta u_l - \frac{G_l}{c_l} \Delta\alpha_l + \frac{\Delta p}{2\rho c} \left[ Q_5 - Q_2 + \frac{G_l}{c_l} (Q_6 - Q_3) \right] + \frac{\Delta u}{2} \left[ Q_2 + Q_5 + \frac{G_l}{c_l} (Q_6 + Q_3) \right] \right\}, \\
 a_5 &= \frac{1}{2} \left( \Delta u - \frac{1}{\rho c} \Delta p \right), \quad a_6 = \frac{1}{2} \left( \Delta u + \frac{1}{\rho c} \Delta p \right),
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Delta\rho &= \rho_R - \rho_L, \quad \Delta u = u_R - u_L, \quad \Delta p = p_R - p_L, \quad \Delta u_l = (u_l)_R - (u_l)_L, \\
 \Delta\rho_l^0 &= (\rho_l^0)_R - (\rho_l^0)_L, \quad \Delta\alpha_l = (\alpha_l)_R - (\alpha_l)_L.
 \end{aligned}$$

«Большие» величины, входящие в расчетные формулы (10) – (11), вычисляются из соотношений:

$$(R, U, P, U_l, R_l, A_l)_{k+1/2} = \begin{cases} (\rho, u, p, u_l, \rho_l^0, \alpha_l)_k, & (u - c)_C > 0; \\ (\rho, u, p, u_l, \rho_l^0, \alpha_l)_{k+1}, & (u + c)_C < 0; \\ (\rho, u, p, u_l, \rho_l^0, \alpha_l)_C, & (u - c)_C \leq 0, \quad (u + c)_C \geq 0. \end{cases}$$

#### 4. Результаты численного моделирования

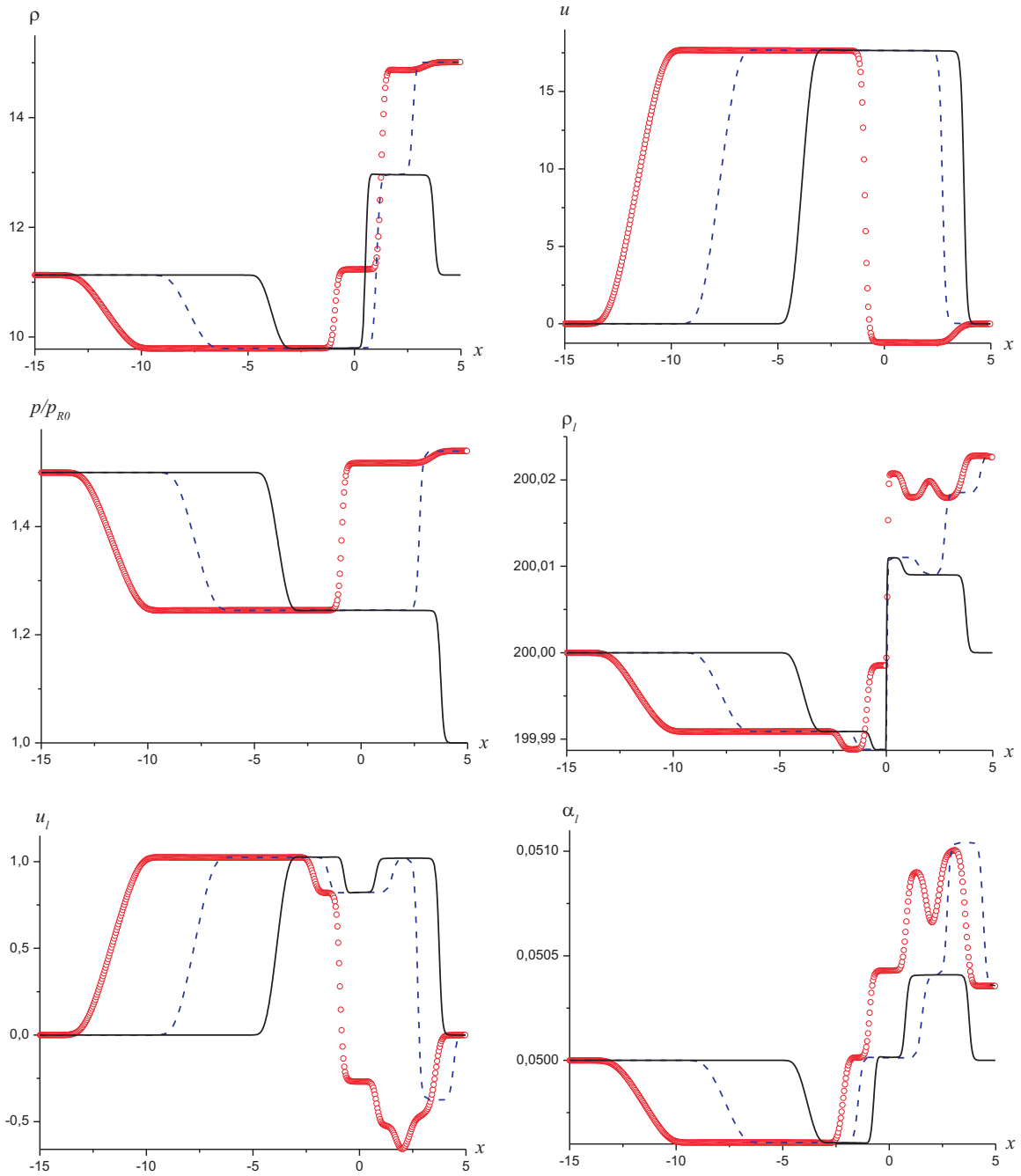
В качестве примера применения описанных выше алгоритмов МГ рассчитана задача об отражении ударной волны в газожидкостной смеси от абсолютно жесткой неподвижной стенки. Константы уравнения состояния уравнения (1) для жидкой фракции следующие:  $\rho_{*l} = 200 \text{ кг/м}^3$ ,  $\gamma_{*l} = 5,59$ ,  $c_{*l} = 1500 \text{ м/с}$ . Соответствующие константы уравнения (1) для газа:  $\rho_{*g} = 1,19 \text{ кг/м}^3$ ,  $\gamma_{*g} = 1,14$ ,  $c_{*g} = 0$ . Коэффициент  $\eta_l$  принимался равным нулю. Параметры смеси до распада следующие: слева от диафрагмы ( $x < 0$ ) –  $p_{0L} = 0,15 \text{ МПа}$ ,  $u_{0L} = u_{l0L} = 0$ ,  $\alpha_{l0L} = 0,05$ ,  $\rho_{l0L}^0 = \rho_{*l}$ ,  $\rho_{g0L}^0 = \rho_{*g}$ ; справа от нее ( $x > 0$ ) –  $p_{0R} = 0,1 \text{ МПа}$ ,  $u_{0R} = u_{l0R} = 0$ ,  $\alpha_{l0R} = 0,05$ ,  $\rho_{l0R}^0 = \rho_{*l}$ ,  $\rho_{g0R}^0 = \rho_{*g}$ . В момент времени  $t = 0$  диафрагма мгновенно удаляется, при этом реализуется режим течения с волной разрежения, перемещающейся влево и ударным скачком, движущимся вправо.

На рисунке представлены результаты расчетов, полученные к моментам времени  $t = 0,03, 0,06$  и  $0,09$  с. Данные этого рисунка иллюстрируют возникновение «вторичных» волн при распаде начального разрыва (сплошные кривые), формирование отраженной «вторичной» волны, возникшей вследствие отражения УВ от преграды (пунктирные кривые), процесс взаимодействия движущейся к преграде и отраженной «вторичных» волн (кружочки). Отметим, что описанная картина образования и взаимодействия «вторичных» волн происходит на фоне неизменного уровня давления. Под «вторичными» волнами подразумеваются волны, характеризующиеся измененными значениями объемных долей отдельных компонентов в смеси и их локальных скоростей при неизменном профиле давления.

#### Заключение

Описан модифицированный метод С.К. Годунова, предназначенный для интегрирования уравнений многоскоростной многокомпонентной смеси нелинейного вида. При расчете





Зависимости  $\rho(x)$ ,  $u(x)$ ,  $p(x)/p_{R0}$ ,  $\rho_l^0(x)$ ,  $u_l(x)$ ,  $\alpha_l(x)$  к моментам времени  $t = 0,03$  (сплошные),  $0,06$  (пунктирные),  $0,09$  с (кружочки), полученные с использованием формул (10)

задач распада произвольного разрыва использован линейризованный римановский решатель. Рассмотренный метод расчета непосредственно распространяется на задачи с несколькими пространственными переменными. Расчеты рассмотренной задачи, выполненные по формулам (11) – (12) с точностью до графического представления совпадают с данными, полученными с использованием выражений (10) представленными на рисунке.

## Литература

1. Stewart, H. Two-Phase Flow: Models and Methods / H. Stewart, B. Wendroff // Journal Comput. Phys. – 1984. – V. 56. – P. 363–409.
2. Суоров, В.С. Гиперболические модели в механике гетерогенных сред / В.С. Суоров // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54, № 1. – С. 139–149.
3. Суоров, В.С. Гиперболическая модель многоскоростной гетерогенной среды / В.С. Суоров // Инженерно-физический журнал. – 2012. – Т. 85, № 3. – С. 1111–1125.
4. Годунов, С.К. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов. – Москва: Наука, 1976. – 400 с.
5. Суоров, В.С. Об одной модификации метода Годунова для расчета односкоростных течений многокомпонентных смесей / В.С. Суоров // Математическое моделирование. – 1998. – Т. 10, № 3. – С. 29–38.
6. Суоров, В.С. Распад произвольного разрыва в односкоростной гетерогенной смеси сжимаемых сред / В.С. Суоров // Теплофизика высоких температур. – 1998. – Т. 36, № 1. – С. 157–161.
7. Суоров, В.С. К расчету модифицированным методом С.К. Годунова течений односкоростной многокомпонентной смеси / В.С. Суоров // Инженерно-физический журнал. – 2011. – Т. 84, № 4. – С. 777–784.
8. Суоров, В.С. Течение Буземана для односкоростной модели гетерогенной среды / В.С. Суоров // Инженерно-физический журнал. – 2007. – Т. 80, № 4. – С. 45–51.
9. Суоров, В.С. Задача Римана для односкоростной модели многокомпонентной смеси / В.С. Суоров // Теплофизика высоких температур. – 2009. – Т. 47, № 2. – С. 283–291.
10. Суоров, В.С. Об одном способе приближенного решения задачи Римана для односкоростной многокомпонентной смеси / В.С. Суоров // Инженерно-физический журнал. – 2010. – Т. 83, № 2. – С. 351–356.
11. Уоллис, Г. Одномерные двухфазные течения / Г. Уоллис. – Москва: Мир, 1972. – 436 с.
12. Суоров, В.С. Задача Римана для многоскоростной модели многокомпонентной среды / В.С. Суоров // Инженерно-физический журнал. – 2013. – Т. 86, № 4. – С. 869–876.
13. Куликовский, А.Г. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений / А.Г. Куликовский, Н.В. Погорелов, А.Ю. Семенов, – Изд. 2-е, доп. и испр. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 635 с.
14. Toro, E.F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics / E.F. Toro, – Berlin: Springer, 1999. – 645 с.
15. Toro, E.F. Riemann Solvers with Evolved Initial Condition / E.F. Toro // Int. Journal for Numerical Methods in Fluids. – 2006. – V. 52. – P. 433–453.

Виктор Сергеевич Суоров, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «Вычислительная механика сплошных сред», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), svsv@csu.ru.

Иван Владимирович Березанский, аспирант, кафедра «Вычислительная механика сплошных сред», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), murnameivanuch@gmail.com.

*Поступила в редакцию 17 февраля 2014 г.*

MSC 35Q35

DOI: 10.14529/mmp140208

## Godunov's Method for a Multivelocity Model of Heterogeneous Medium

*V.S. Surov*, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, sv@csu.ru,  
*I.V. Berezansky*, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation,  
mynameivanych@gmail.com

This article uses a model of heterogeneous media accounting for an additional state of the medium as a mixture characterized by averaged quantities. The equations describing this state coincide with the equations of gas dynamics. Additional equations express conservation laws, but only for the components with the local speed of sound lower than in the mixture; we assume that other waves are absorbed by the media and form waves in the mixture. Since the equations are not in divergence form, the original Godunov's method is inapplicable. We suggest a modified Godunov's method to integrate the nondivergent system of equations for a multivelocity heterogeneous mixture. We use a linearized Riemann solver for Riemann problems.

*Keywords:* multivelocity multicomponent medium; hyperbolic systems of PDEs not in divergence form; modification of Godunov's approach; linearized Riemann solver; numerical modelling.

## References

1. Stewart H., Wendroff B. Two-Phase Flow: Models and Methods. *Journal Comput. Phys.*, 1984, vol. 56, pp. 363–409. DOI: 10.1016/0021-9991(84)90103-7
2. Surov V.S. Hyperbolic Models in the Mechanics of Heterogeneous Media. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2014, vol. 54, no. 1, pp. 148–157. DOI: 10.1134/S096554251401014X
3. Surov V.S. Hyperbolic Model of a Multivelocity Heterogeneous Medium. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2012, vol. 85, no. 3, pp. 530–538. DOI: 10.1007/s10891-012-0683-0
4. Godunov S.K., Zabrodin A.V., Ivanov M.Ya. *Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoy dinamiki* [The Numerical Solution of Gas Dynamic Multidimensional Problems]. Moscow, Nauka, 1976.
5. Surov V.S. A Modification of Godunov Approach for Calculating Single Speed Flows of Multicomponent Mixtures. *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical Modelling], 1998, vol. 10, no. 3, pp. 29–38. (in Russian)
6. Surov V.S. Breakup of Arbitrary Discontinuity in One-Velocity Heterogeneous Mixture of Compressible Media. *High Temperature*, 1998, vol. 36, no. 1, pp. 156–159.
7. Surov V.S. Toward the Calculation of Flows of a One-Velocity Multicomponent Mixture by the Modified S.K. Godunov Method. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2011, vol. 84, no. 4, pp. 840–848. DOI: 10.1007/s10891-011-0541-5

8. Surov V.S. The Busemann Flow for a One-Velocity Model of a Heterogeneous Medium. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2007, vol. 80, no. 4, pp. 681–688. DOI: 10.1007/s10891-007-0092-y
9. Surov V.S. The Riemann Problem for One-Velocity Model of Multicomponent Mixture. *High Temperature*, 2009, vol. 47, no. 2, pp. 263–271. DOI: 10.1134/S0018151X09020175
10. Surov V.S. On a Method of Approximate Solution of the Riemann Problem for a One-Velocity Flow of a Multicomponent Mixture. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2010, vol. 83, no. 2, pp. 373–379. DOI: 10.1007/s10891-010-0354-y
11. Uollis G. *Odnomernyye dvuhfaznyie techeniya* [One Dimensional Two-Phase Flows]. Moscow, Mir, 1972.
12. Surov V.S. The Riemann Problem for the Multivelocity Model of a Multicomponent Medium. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2013, vol. 86, no. 4, pp. 926–934. DOI: 10.1007/s10891-013-0913-0
13. Kulikovskii A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu. *Matematicheskie voprosyi chislennogo resheniya giperbolicheskikh sistem uravneniy* [The Mathematical Complexities of Numerical Solving the Hyperbolic Systems]. Moscow, Fizmatlit, 2001.
14. Toro E.F. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Berlin, Springer, 1999. DOI: 10.1007/978-3-662-03915-1
15. Toro E.F. Riemann Solvers with Evolved Initial Condition. *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2006, vol. 52, pp. 433–453. DOI: 10.1002/fld.1186

*Received February 17, 2014*