

## ФОРМА КЛЮЧЕВОЙ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧЕ О МОДЕЛИРОВАНИИ ВЕТВЛЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЭКСТРЕМАЛЕЙ С РЕЗОНАНСОМ 1:1:1

*Е.В. Бухонова*

В статье изложена допускающая алгоритмизацию методика приближенного вычисления нормализованных ключевых функций в задаче о ветвлении периодических экстремалей гладкого функционала действия вблизи его точки минимума. Периодические экстремали такого функционала служат прототипами периодических колебаний динамических систем, сегнетоэлектрических фаз кристаллов, нелинейных периодических волн и т.д. Изучение бифуркации циклов динамических систем посредством ключевых уравнений и ключевых функций было недавно проведено в работах А.П. Карповой, Н.А. Копытина, Е.В. Деруновой и Ю.И. Сапронова в случаях двойных резонансов  $p_1 : p_2 : p_3$ ,  $p_1 < p_2 < p_3$ . В настоящей статье рассмотрен мало изученный случай  $p_1 = p_2 = p_3 = 1$ . Предложенная в статье исследовательская схема опирается на вариационную версию метода Ляпунова – Шмидта, в соответствии с которой численное и качественное описание бифуркаций циклов сводится к анализу ветвления критических точек так называемой ключевой функции. В качестве демонстрационной модели рассмотрен функционал действия, соответствующий обыкновенному дифференциальному уравнению шестого порядка. Приведены примеры раскладов ветвей критических точек и описан подход к классификации таких раскладов, основанный на разбиении бифурцирующих ветвей на подмножества с одинаковыми индексами Морса и на описании взаимных примыканий бифурцирующих критических точек.

*Ключевые слова:* гладкий функционал; экстремаль; круговая симметрия; резонанс; моделирование ветвления; метод Ляпунова – Шмидта.

### 1. Введение и постановка задачи

В данной статье изложена методика приближенного вычисления нормализованных ключевых функций в задаче о моделировании ветвления периодических экстремалей гладкого функционала действия вблизи точки минимума. Периодические экстремали такого функционала служат прототипами периодических колебаний динамических систем, сегнетоэлектрических фаз кристаллов, нелинейных периодических волн и т.д. Изучение бифуркации циклов динамических систем посредством ключевых уравнений и ключевых функций было недавно проведено в работах Б.М.Даринского, Е.В. Деруновой, А.П. Карповой, Н.А. Копытина и Ю.И. Сапронова в случаях двойных резонансов  $p_1 : p_2 : p_3$ ,  $p_1 < p_2 < p_3$  (см. [1–4]).

Далее рассмотрен мало изученный случай  $p_1 = p_2 = p_3 = 1$ . В качестве демонстрационной модели рассмотрена ОДУ шестого порядка

$$\frac{d^6 w}{dt^6} + a_3 \frac{d^4 w}{dt^4} + a_2 \frac{d^2 w}{dt^2} + a_1 w + U \left( w, \frac{dw}{dt}, \frac{d^2 w}{dt^2}, \dots, \frac{d^6 w}{dt^6} \right) = 0, \quad (1)$$

$U(w, w_1, w_2, \dots, w_6) = O(w^2 + w_1^2 + \dots + w_6^2)$ . Под двойным резонансом (типа  $p_1 : p_2 : p_3$ ) уравнения (1) подразумевается существование (для соответствующего линеаризованного ОДУ)

трех периодических решений  $\exp(\frac{2\pi i p_k}{T} t)$ ,  $T > 0$ ,  $p_k \in \mathbb{Z}$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,  $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq p_3$ ,  $HOD(p_1, p_2, p_3) = 1$ . Резонанс  $p_1 : p_2 : p_3$  называется сильным, если существует такой ненулевой набор целых чисел  $n_1, n_2, n_3$ , что  $n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 = 0$  и  $|n_1| + |n_2| + |n_3| \leq 4$ . Число  $|n_1| + |n_2| + |n_3|$  называется порядком резонансного соотношения  $n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 = 0$ . Число, наименьшее из порядков резонансных соотношений, называется порядком данного резонанса. Резонансные соотношения порядка  $\geq 5$  называются слабыми. Резонанс, для которого существует сильное резонансное соотношение, называется сильным, и слабым — в противном случае.

Ниже предполагается, что  $T = 2\pi$  и  $p_1 = p_2 = p_3 = 1$ . Базовое предположение — условие потенциальности: уравнение (1) служит уравнением Эйлера-Лагранжа экстремалей функционала действия  $V(w, a) =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} \left( \left( \frac{d^3 w}{dt^3} \right)^2 - a_3 \left( \frac{d^2 w}{dt^2} \right)^2 + a_2 \left( \frac{dw}{dt} \right)^2 - a_1 w^2 \right) + \mathcal{U} \right) dt, \quad (2)$$

$\mathcal{U} = \mathcal{U} \left( w, \frac{dw}{dt}, \frac{d^2 w}{dt^2}, \frac{d^3 w}{dt^3} \right)$ ,  $\mathcal{U}(w, w_1, w_2, w_3) = o(w^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)$ . Функционал  $V$  рассмотрен на пространстве  $E$ , состоящем из  $2\pi$ -периодических функций класса  $C^6$  со значениями в области вещественных чисел.

В [2–4] были приведены списки систем образующих алгебраических инвариантов для ортогонального действия окружности на  $\mathbb{R}^6$  и, как следствие, нормальные формы главных частей ключевых функций в случае двойных резонансов порядков. В данной работе рассмотрен случай наиболее сильного двойного резонанса  $1 : 1 : 1$ . Предложенная схема опирается на работы [3–5] и на вариационную версию метода Ляпунова – Шмидта, в соответствии с которой численное и качественное описание бифуркации циклов сводится к анализу ветвления критических точек ключевой функции

$$W(\xi, a) = \inf_{w: \langle w, e_k \rangle = \xi_k} V(w, a) = V \left( \sum_{i=1}^6 \xi_i e_i + \Phi(\xi) \right) \quad (3)$$

от шести ключевых переменных  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_6$  ( $e_1, e_2, \dots, e_6$  — моды бифуркации).

Некоторые бифуркационные эффекты в случае резонанса  $1 : 1$  были изучены В.В. Стрыгиным и его учениками методами теории усреднений в рамках задачи синхронизации динамических систем [6].

## 2. Ключевые функции и их вычисление посредством нелинейной ритцевской аппроксимации

Опишем кратко практическую схему (локальной) редукции к функции (3). Будем рассматривать  $2\pi$ -периодические экстремали. Пусть  $f(x, a)$  — правая часть уравнения (1), рассмотренного в паре банаховых пространств  $E, F$ ,  $E := \Pi_{2\pi}^6$ ,  $F := \Pi_{2\pi}^0$  — пространства  $2\pi$ -периодических функций классов  $C^6$  и, соответственно,  $C^0$ . Пусть  $H := L_2[0, 2\pi]$  — (гильбертово) пространство функций на отрезке  $[0, 2\pi]$  с суммируемым квадратом (со скалярным произведением  $\langle u, v \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} uv dt$ ). Очевидно, что  $E$  непрерывно вложено в  $F$ ,  $F$  непрерывно и плотно вложено в  $H$  и  $E$  плотно в  $H$ . В приложениях достаточно вычислить лишь несколько первых членов разложения  $W$  в ряд Тейлора. В локальных задачах для этого используется специальным образом подобранная ритцевская аппроксимация функционала  $V$  по модам  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — функция  $W_R(\xi) = V \left( \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \right)$ ,  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ . Экстремалиам

$\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n)$  функции  $W$  соответствуют точки  $\bar{x} = \sum_{i=1}^n \bar{\xi}_i e_i$ , называемые ритцевскими аппроксимациями экстремалей  $V$ . Точность ритцевских аппроксимаций повышается за счет увеличения количества базисных функций. Если, обобщая, рассмотреть «нелинейные» ритцевские аппроксимации вида  $W(\xi) = V \left( \sum_{j=1}^n \xi_j e_j + \Phi(\xi) \right)$ , где  $\Phi$  — гладкое отображение из  $N := \text{span}(e_1, \dots, e_n)$  в  $N^\perp$  (ортогональное дополнение к  $N$  в  $H$ ), то можно достигнуть любой точности при априори зафиксированном наборе базисных функций и, следовательно, априори ограниченном количестве степеней свободы аппроксимирующей системы [1].

Ниже рассмотрен случай локализации параметров:  $a_k = \bar{a}_k + \delta_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , где

$$(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)^\top = (p_1^2 p_2^2 p_3^2, p_1^2 p_2^2 + p_1^2 p_3^2 + p_2^2 p_3^2, p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^\top,$$

$\delta_1, \delta_2, \delta_3$  — малые параметры. После пересечения точкой  $(a_1, a_2, a_3)$  характеристической плоскости (в пространстве параметров  $\mathbb{R}^3$ ) происходит смена значения индекса Морса в начале координат. Характеристические плоскости задаются посредством линейаризованного уравнения

$$\frac{d^6 h}{dx^6} + a_3 \frac{d^4 h}{dx^4} + a_2 \frac{d^2 h}{dx^2} + a_1 h = 0 \tag{4}$$

и состоят из тех и только тех точек  $a = (a_1, a_2, a_3)$ , для которых уравнение (4) имеет ненулевое  $2\pi$ -периодическое решение. Поиск таких точек приводит к характеристическому уравнению  $-\lambda^6 + a_3 \lambda^4 - a_2 \lambda^2 + a_1 = 0$ . Если найдены три линейно независимых  $2\pi$ -периодических решения линейаризованного уравнения, то из последнего уравнения получаем

$$\lambda^2 = n^2, \quad n \in \{p_1, p_2, p_3\}, \quad p_j \in \mathbb{N}, \quad p_1 < p_2 < p_3.$$

Соотношение  $a_0 = a_2 n^2 - a_1 n^4 + n^6$  задает характеристическую плоскость  $L_n$ . Огибающая поверхность  $L$  семейства характеристических плоскостей  $L_n$  ограничивает область изменения параметров, для которой функционал действия имеет в нуле точку минимума. При пересечении точкой  $a = (a_1, a_2, a_3)$  поверхности  $L_n$  происходит бифуркация рождения (уничтожения) экстремалей в нуле. Пересечение поверхности  $L$  приводит либо к одномерной бифуркации из нуля с парой двойственных мод  $e_{2n-1} = \sqrt{2} \cos(nt)$ ,  $e_{2n} = \sqrt{2} \sin(nt)$ , либо к двумерной бифуркации с модами  $e_{2n-1}, e_{2n}, e_{2m-1}, e_{2m}$ , либо к трехмерной бифуркации с модами  $e_{2n-1}, e_{2n}, e_{2m-1}, e_{2m}, e_{2l-1}, e_{2l}$ . Характеристические плоскости  $L_m, L_n, L_l$ , отвечающие произвольной тройке попарно различных натуральных чисел  $m, n, l$ , пересекаются по единственной точке  $(a_1, a_2, a_3) = (n^2 + m^2 + l^2, n^2 m^2 + m^2 l^2 + n^2 l^2, n^2 m^2 l^2)$ . Для иллюстрации рассмотрим важный для приложений случай:  $\mathcal{U} \left( w, \frac{dw}{dt}, \frac{d^2 w}{dt^2}, \frac{d^3 w}{dt^3} \right) = \frac{w^4}{4}$ ,  $m = 1, n = 2, l = 3$ .

После подстановки функции  $u = \sum_{k=1}^6 \xi_k e_k$  в интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} \left( \left( \frac{d^3 w}{dx^3} \right)^2 - a_3 \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 + a_2 \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 - a_1 w^2 \right) + \frac{w^4}{4} \right) dt$$

получим следующее выражение для ключевой функции (3)  $W = \widetilde{W}^{(4)} + \frac{1}{2} (\lambda_1 (\xi_1^2 + \xi_2^2) + \lambda_2 (\xi_3^2 + \xi_4^2) + \lambda_3 (\xi_5^2 + \xi_6^2)) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta)$ , где  $\lambda_1 = c(\delta_1 - \delta_2 + \delta_3)$ ,  $\lambda_2 = c(\delta_1 - 16\delta_2 + 4\delta_3)$ ,  $\lambda_3 = c(\delta_1 - 81\delta_2 + 9\delta_3)$ ,  $c = \text{const}$ .

Проверка основана на прямом вычислении главной части ключевой функции (вычисление проведено в среде Maple). Если в трех плоскостях  $\{\xi_1, \xi_2\}$ ,  $\{\xi_3, \xi_4\}$ , и  $\{\xi_5, \xi_6\}$  ввести

полярные координаты:  $\xi_{2k-1} = r_k \cos(\varphi_k)$ ,  $\xi_{2k} = r_k \sin(\varphi_k)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , и провести редукцию по угловым переменным  $\varphi_k$ :  $\widehat{W}(r) := \text{extr}_{\varphi} W(\xi)$ , то получим редуцированную ключевую

функцию:  $\widehat{W}(r) = \sum_{j=1}^3 r_j^4 + 4(r_1^2 r_2^2 + r_1^2 r_3^2 + r_2^2 r_3^2) - \frac{4}{3} r_1^3 r_3 + 4 r_1 r_2^2 r_3 + \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^3 \lambda_j r_j^2 \right) + o(|r|^4) + O(|r|^4)O(\delta)$ . Мономиальное слагаемое  $\frac{4}{3} r_1^3 r_3$  в этом полиноме можно уничтожить нормализующей линейной заменой координат [7].

### 3. Главная часть трехмодовой ключевой функции

В общем случае ключевая функция имеет следующий вид  $\frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^3 \delta_k I_k \right) + \frac{1}{4} \left( \sum_{k=1}^3 A_k I_k^2 + 2 \sum_{k,j=1}^3 B_{k,j} I_k^2 I_j^2 \right) + J + o(\|\xi\|^4)$ , где  $I_k = \xi_{2k-1}^2 + \xi_{2k}^2$  — стандартные инварианты, а  $J$  — линейная комбинация всех дополнительных (кроме стандартных  $I_k$ ) образующих инвариантов степени  $\leq 4$  — для рассматриваемого действия окружности на  $\mathbb{R}^6 \cong \mathbb{C}^3$ :

$$\{\exp(i\varphi), z\} \mapsto (\exp(i p_1 \varphi) z_1, \exp(i p_2 \varphi) z_2, \exp(i p_3 \varphi) z_3)^\top. \quad (5)$$

Если обратиться к комплексной форме многочленов от переменных  $z_k := \xi_{2k-1} + \xi_{2k} i$ , то инвариантами действия окружности будут многочлены  $I_k = |z_k|^2$ ,  $k = 1, 2, 3$ , (стандартные инварианты степени 2). Кроме того, имеются (см. [3]) следующие инварианты степеней 3 и 4 (см. табл. 1).

Таблица 1

Список инвариантов

Тип резонанса	Инвариант
1 : 2 : 3	$\bar{z}_1^2 z_2, \bar{z}_1 \bar{z}_2 z_3, \bar{z}_1 \bar{z}_3 z_2^2, \bar{z}_1^3 z_3$
1 : 2 : 4	$\bar{z}_1^2 z_2, \bar{z}_2^2 z_3, \bar{z}_1^2 \bar{z}_2 z_3$
1 : 2 : 5	$\bar{z}_1^2 z_2, \bar{z}_1 \bar{z}_2^2 z_3$
1 : 2 : 6	$\bar{z}_1^2 z_2, \bar{z}_2^3 z_3$
1 : 3 : 4	$\bar{z}_1^3 z_2, \bar{z}_1 \bar{z}_2 z_3$
1 : 3 : 5	$\bar{z}_1^3 z_2, \bar{z}_1^2 \bar{z}_2 z_3$
1 : 3 : 6	$\bar{z}_1^3 z_2, \bar{z}_2^2 z_3$
1 : 3 : 7	$\bar{z}_1^3 z_2, \bar{z}_1 \bar{z}_2^2 z_3$
1 : 3 : 9	$\bar{z}_1^3 z_2, \bar{z}_2^3 z_3$
$p : q : p + q, p + q \geq 5, p, q \geq 1$	$\bar{z}_1 \bar{z}_2 z_3$
$p : q : 2p + q, p + q \geq 5, p, q \geq 1$	$\bar{z}_1^2 \bar{z}_2 z_3$
$p : q : p + 2q, p + q \geq 5, p, q \geq 1$	$\bar{z}_1 \bar{z}_2^2 z_3$
$p : 2p : q, p + q \geq 8, p, q \geq 1$	$\bar{z}_1^2 z_2$
$p : q : 2q, p + q \geq 5, p, q \geq 1$	$\bar{z}_2^2 z_3$
$p : 3p : q, p + q \geq 9, p, q \geq 1$	$\bar{z}_1^3 z_2$
$p : q : 3q, p + q \geq 5, p, q \geq 1$	$\bar{z}_2^3 z_3$

В случае  $p : q : r, p + q \geq 5, p + r \geq 5, q + r \geq 5$  дополнительных инвариантов степеней 3 и 4 нет.

Перейдя к полярным координатам  $z_k = r_k e^{i\varphi_k}$ , получим ключевую функцию в виде  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_0 + \mathcal{P} + o(\|r\|^4)$ , где  $\mathcal{W}_0 = \sum_{j=1}^3 r_k^4 + \sum_{j < k} a_{j,k} r_j^2 r_k^2 + \delta_1 r_1^2 + \delta_2 r_2^2 + \delta_3 r_3^2$ ,  $\{a_{j,k}\} -$

структурные параметры,  $\mathcal{P}$  — некоторый полином четвертой степени от  $r$  с коэффициентами, зависящими от  $\varphi$ ,  $\delta_j$  — малый параметр. От угловых переменных можно избавиться посредством вторичной редукции к функции  $\mathcal{U}(r)$ :

$$\mathcal{U}(r) := \operatorname{extr}_{\varphi} \mathcal{W}(r, \varphi) = \mathcal{W}_0 + \mathcal{P}_0 + O(\|r\|^4)O(\delta) + o(\|r\|^4). \quad (6)$$

После исключения угловых переменных  $\varphi_k$  получается функция  $\mathcal{U}(r)$ , инвариантная относительно действия в  $\mathbb{R}^3$  группы «остаточной» симметрии  $G$ , порожденной исходным действием окружности в  $\mathbb{C}^3$ . Точнее, группа  $G$  порождена теми действиями (5), которые переводят стационарные (по  $\varphi$ ) подмногообразия (для  $\mathcal{W}(r, \varphi)$ ) в точно такие же подмногообразия.

Если функция  $\mathcal{U}(r)$  конечнократно <sup>1</sup> (в точке минимума), то она приводится (см. [3]) посредством  $G$ -эквивариантной параметрической замены координат и переопределения параметров к следующей нормальной до четвертого порядка форме:

$$\sum_{j=1}^3 r_k^4 + \sum_{j < k} a_{j,k} r_j^2 r_k^2 + \mathcal{P}_0 + \frac{1}{2} (\delta_1 r_1^2 + \delta_2 r_2^2 + \delta_3 r_3^2) + O(\|r\|^4)O(\delta) + o(\|r\|^4), \quad (7)$$

в которой слагаемое  $\mathcal{P}_0$  представлено табл. 2 (параметры  $\varepsilon_j$  являются малыми),  $G$  — группа остаточной симметрии.

**Таблица 2**

Список нормализованных добавочных членов

$p_1 : p_2 : p_3$	$\mathcal{P}_0$
1 : 2 : 3	$br_1 r_2^2 r_3 + \varepsilon_1 r_1 r_2 r_3 + \varepsilon_2 r_1^2 r_2$
1 : 2 : 4	$b r_1^2 r_2 r_3 + \varepsilon_1 r_1^2 r_2 + \varepsilon_2 r_2^2 r_3$
1 : 2 : 5	$\varepsilon_1 r_1^2 r_2 + \varepsilon_2 r_1 r_2^2 r_3$
1 : 2 : 6	$\varepsilon r_1^2 r_2$
1 : 3 : 4	$\varepsilon r_1 r_2 r_3$
1 : 3 : 5	$\varepsilon r_1^2 r_2 r_3$
1 : 3 : 6	$\varepsilon r_2^2 r_3$
1 : 3 : 7	$br_1 r_2^2 r_3$
1 : 3 : 9	0
$p : q : p + q, p + q \geq 5, p, q \geq 1$	$\varepsilon r_1 r_2 r_3$
$p : q : 2p + q, p + q \geq 5, p, q \geq 1$	$\varepsilon r_1^2 r_2 r_3$
$p : q : p + 2q, p + q \geq 5, p, q \geq 1$	$\varepsilon r_1 r_2^2 r_3$
$p : 2p : q, p + q \geq 8, p, q \geq 1$	$\varepsilon r_1^2 r_2$
$p : q : 2q, p + q \geq 5, p, q \geq 1$	$\varepsilon r_2^2 r_3$
$p : 3p : q, p + q \geq 9, p, q \geq 1$	0
$p : q : 3q, p + q \geq 5, p, q \geq 1$	0

Здесь учтено, что каждый моном  $r_j^3 r_k$ ,  $j \neq k$ , после проецирования в фактор  $\mathbb{R}[[x_1, x_2, x_3]] / \left\langle \frac{\partial W}{\partial x_1}, \frac{\partial W}{\partial x_2}, \frac{\partial W}{\partial x_3} \right\rangle$  (локальное кольцо *min*-особенности [7]) попадает в линейную оболочку мономов  $r_j^2 r_k^2$ ,  $j \neq k$ , и  $r_j^2 r_k r_l$ ,  $j \neq k \neq l \neq j$ .

<sup>1</sup>Условие конечнократности означает, что  $\dim \left( \mathbb{R}[[x_1, x_2, x_3]] / \left\langle \frac{\partial W}{\partial x_1}, \frac{\partial W}{\partial x_2}, \frac{\partial W}{\partial x_3} \right\rangle \right) < \infty$ , [1, с. 8], [7].

## 4. Примеры

Примеры нормализованных ключевых функций приведены в [1, 3]. Остановимся на некоторых из них.

В случае резонанса 1:2:4 ключевая функция, редуцированная по угловым переменным, приводится форме

$$\sum_{j=1}^3 r_k^4 + \sum_{j < k} a_{j,k} r_j^2 r_k^2 + b r_1^2 r_2 r_3 + \varepsilon_1 r_1^2 r_2 + \varepsilon_2 r_2^2 r_3 + \delta_1 r_1^2 + \delta_2 r_2^2 + \delta_3 r_3^2 + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta).$$

Вычисление коэффициентов проводится по стандартному алгоритму. Сначала вычисляется тейлоровское приближение  $\widetilde{W}$  к ключевой функции до четвертого порядка (на пространстве ключевых переменных  $\mathbb{R}^6$ ). Затем в трех плоскостях парных мод бифуркации вводятся полярные координаты, и у записанной в этих координатах тейлоровской аппроксимации  $\widetilde{W}$  ключевой функции определяются критические значения угловых переменных. После фиксирования этих значений угловых переменных получаем редуцированную главную часть в виде полинома  $\mathcal{W}$  четвертой степени от трех радиальных переменных. Процесс нормализации полученной функции  $\mathcal{W}$  опирается на теорему Дж. Мазера [7] об эквивалентности функции своей главной части (с учетом остаточной симметрии).

Для получения первых асимптотик (по  $\delta$ ) ветвей бифурцирующих экстремалей достаточно рассмотрения огрубленной ключевой функции (см. [1, с. 30, 31])

$$\sum_{j=1}^3 r_k^4 + \sum_{j < k} a_{j,k} r_j^2 r_k^2 + b r_1^2 r_2 r_3 + \varepsilon_1 r_1^2 r_2 + \varepsilon_2 r_2^2 r_3 + \delta_1 r_1^2 + \delta_2 r_2^2 + \delta_3 r_3^2.$$

В случае резонанса 1:2:3 ключевая функция  $\mathcal{W}$  приводится к форме

$$\sum_{j=1}^3 r_k^4 + \sum_{j < k} a_{j,k} r_j^2 r_k^2 + b r_1^2 r_2 r_3 + \varepsilon_1 r_1 r_2 r_3 + \varepsilon_2 r_1^2 r_2 + \delta_1 r_1^2 + \delta_2 r_2^2 + \delta_3 r_3^2.$$

В случае резонанса  $p : 2p : q$ ,  $p + q \geq 8$ , после замены  $r_1^2 = y_1$ ,  $r_2 = y_2$ ,  $r_3^2 = y_3$  получим функцию (с угловой особенностью [8])  $\widetilde{U} = y_1^2 + y_2^4 + y_3^2 + a_{1,2} y_1 y_2^2 + a_{1,3} y_1 y_3 + a_{2,3} y_2^2 y_3 + \varepsilon y_1 y_2 + \delta_1 y_1 + \delta_2 y_2^2 + \delta_3 y_3$ . Ее анализ проведен в [1].

В случае слабого резонанса  $p : q : r$ , после замены  $r_1^2 = y_1$ ,  $r_2^2 = y_2$ ,  $r_3^2 = y_3$  (для редуцированной и нормализованной ключевой функции), получим функцию с главной частью  $\widetilde{U}(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + a y_1 y_2 + b y_1 y_3 + c y_2 y_3 + \delta_1 y_1 + \delta_2 y_2 + \delta_3 y_3$  в положительном октанте  $\{y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0\}$  (с угловой особенностью [1, 8]). Ее анализ проведен в [9].

## 5. Случай резонанса 1:1:1

Рассмотрев в случае резонанса 1 : 1 : 1 отрезок ряда Тейлора ключевой функции порядка 4, получим полином  $W(\xi)$ , эквивариантный относительно стандартного действия окружности на  $\mathbb{R}^6$ . Если отождествить вектор  $\xi \in \mathbb{R}^6$  с комплексным вектором  $z = (z_1, z_2, z_3)^T \in \mathbb{C}^3$ ,  $z_1 = \xi_1 + i\xi_2$ ,  $z_2 = \xi_3 + i\xi_4$ ,  $z_3 = \xi_5 + i\xi_6$ , то это действие окружности задается соответствием  $\mathcal{T} : \{\exp(i\varphi), z\} \mapsto \exp(i\varphi) z$ . Инвариантность означает выполнение соотношения  $W(\mathcal{T}_\varphi(\xi)) = W(\xi) \quad \forall \{\xi, \varphi\}$ . Если положить  $\mathcal{U}(z) := W(\xi)$ , то будем иметь соотношение  $\mathcal{U}(\exp(it)z) = \mathcal{U}(z) \quad \forall t, z$ . Отсюда получаем следующее представление для квадратичной части:  $\mathcal{U}(z)^{(2)} = \sum_{j,k} a_{j,k} z_j \bar{z}_k$ ,  $a_{j,k} = \bar{a}_{k,j} \in \mathbb{C}$ . Для кватерничной части  $\mathcal{U}(z)^{(4)}$  имеем  $\sum_{j,k} \beta_{j,k} |z_j|^2 |z_k|^2 + \mathcal{R}(z) + \overline{\mathcal{R}(z)}$ ,  $\mathcal{R}(z) := c_1 \bar{z}_1^2 z_2 z_3 + c_2 z_1 \bar{z}_2^2 z_3 + c_3 z_1 z_2 \bar{z}_3^2$ ,  $\beta_{j,k} \in \mathbb{R}$ ,  $b_j \in \mathbb{C}$ .

Нетрудно проверить, что каждая стационарная по угловым переменным  $\varphi_j$  точка регулярна по этим переменным. После их исключения (см. (6)) получим редуцированный вещественный полином

$$\widehat{U}(r) := \operatorname{extr}_{\varphi} \mathcal{U}(z), \quad (8)$$

для которого верно следующее утверждение:

**Теорема 1.** *Для главной части вторично редуцированной ключевой функции (3) (полином (8)) имеет место следующее представление:*

$$\widehat{U}(r) = \sum_{j,k} \alpha_{j,k} r_j r_k + \sum_{j,k} \beta_{j,k} r_j^2 r_k^2 + \gamma_1 r_1^2 r_2 r_3 + \gamma_2 r_1 r_2^2 r_3 + \gamma_3 r_1 r_2 r_3^2,$$

где  $\alpha_{j,k}, \beta_{j,k}, \gamma_j$  — некоторые вещественные константы.

Из нуля рождается не более 26 ветвей ненулевых критических точек полинома  $\widehat{U}(r)$  (так как кратность нулевой критической точки «общего» кватерничного полинома равна 27) и не менее 6 ветвей. Возможные расклады бифурцирующих критических точек можно классифицировать, разбивая их на подгруппы с одинаковыми индексами Морса<sup>2</sup> [1].

Важнейший для приложений случай связан с условием положительной определенности квадратичной части. Посредством масштабирующих преобразований переменных этот случай сводится к ситуации, в которой  $\sum_{j,k} \alpha_{j,k} r_j r_k = \lambda \sum_j r_j^2$ . Поиск и анализ критических

точек функции  $\widehat{U}(r)$  сводится в этом случае к анализу критических точек сужения  $\widehat{U}(r) \Big|_{S^2}$  на сферу  $S^2 = \{r \in \mathbb{R}^3 : r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1\}$ .

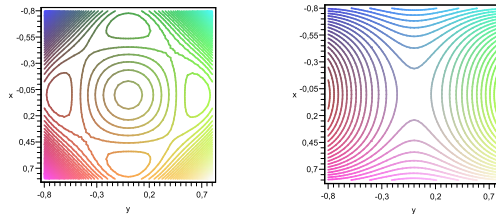
Из теории Морса известно (см. [10]), что каждую гладкую функцию  $W$  на гладком многообразии  $M$ , имеющую лишь морсовские критические точки, можно «закодировать» клеточным комплексом, каждая клетка размерности  $k$  которого взаимно однозначно соответствует критической точке индекса Морса  $k$  функции  $W$ . Взаимные примыкания клеток в комплексе соответствуют взаимным примыканиям критических точек (как особых точек динамической системы  $\dot{\xi} = -\operatorname{grad} W(\xi)$ ). Гомотопический тип кодирующего комплекса совпадает с гомотопическим типом многообразия  $M$ . Из этого факта вытекает, что наборы стационарных точек функций на плоскости и на двумерных поверхностях изображаются графами (одномерными остовами клеточных комплексов). Если функция  $W$  коэрцитивна, то кодирующий комплекс гомотопически тривиален (гомотопен точке) и, следовательно, связан.

Пусть  $l_0, l_1$  и  $l_2$  — количества минимумов, седел и максимумов. Тогда, в силу известной формулы Эйлера (см. [10]), имеем соотношением  $l_0 - l_1 + l_2 = 2$ . Кодирующий клеточный комплекс определяется своим одномерным остовом (изображающим графом). Вершины графа взаимно однозначно соответствуют точкам минимумов, а ребра — седлам. При этом две вершины соединяются ребром тогда и только тогда, когда существует кривая, соединяющая соответствующую им пару точек минимумов, составленная из пары линий кратчайшего спуска (интегральных кривых поля градиентов), связывающих пары «седло – минимум» (малым шевелением функции (или метрики) можно добиться того, чтобы каждая интегральная кривая, вытекающая из седла, втекала в точку локального минимума). Двумерные грани соответствуют точкам максимума. За счет изменения метрики в областях вида  $\{c_1 < W < c_2\}$ , не содержащих критических точек, можно переносить финальные точки сепаратрис из одних локальных минимумов на другие (то есть сепаратрисы будут втекать

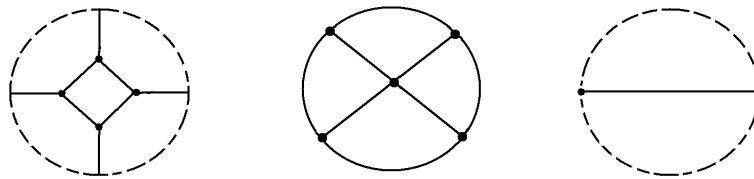
<sup>2</sup>Индекс Морса равен количеству собственных значений матрицы Гессе (якобиана градиента) функции в критической точке, имеющих отрицательные вещественные части.

в иные точки локальных минимумов). За счет таких переключений можно получать разнообразные соединения ребрами вершин в пределах одного расклада стационарных точек (примеры приведены в [1]).

Ниже рассмотрены примеры комплексов для «крайних» раскладов  $l = \{l_0, l_1, l_2\}$  (см. рис. 1, 2), которым соответствуют максимальные и минимальные графы (из 26 и, соответственно, 6 элементов).



**Рис. 1.** Примеры линий уровней полинома  $\hat{U}(r)$  на полусфере с максимальным и минимальным раскладами критических точек



**Рис. 2.** Графы на сфере для максимальных ( $l = \{8, 12, 6\}$  и  $l = \{6, 12, 8\}$ ) и минимального ( $l = \{2, 2, 2\}$ ) раскладов критических точек

Так как полином  $\hat{U}(r)$  четен, то для изображения его линий уровней и критических точек достаточно рассмотреть соответствующим образом подобранную полусферу (отождествленную с кругом на плоскости).

## Литература

1. Даринский, Б.М. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов / Б.М. Даринский, Ю.И. Сапронов, С.Л. Царев // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2004. – Т. 12. – С. 3–140.
2. Ключевые уравнения в динамических системах с 2-кратными резонансами / А.П. Карпова, Н.А. Копытин, Ю.И. Сапронов // Математические модели и операторные уравнения. – 2009. – Т. 6. – С. 51–58.
3. Дерунова, Е.В. Трехмодовые бифуркации экстремалей из точки минимума фредгольмова функционала в условиях круговой симметрии / Е.В. Дерунова, Ю.И. Сапронов // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2014. – № 1. – С. 64–77.
4. Даринский, Б.М. Ветвление фаз кристалла, определяемых термодинамическим потенциалом шестого порядка / Б.М. Даринский, И.В. Колесникова, Ю.И. Сапронов // Системы управления и информационные технологии. – 2009. – № 1 (35). – С. 72–76.



5. Зачепа, А.В. О бифуркации экстремалей фредгольмова функционала из вырожденной точки минимума с особенностью 3-мерной сборки / А.В. Зачепа, Ю.И. Сапронов // Труды математического факультета ВГУ. – 2005. – Вып. 9. – С. 57–71.
6. Стрыгин, В.В. Бифуркация малых синхронных автоколебаний двух динамических систем с близкими частотами / В.В. Стрыгин, Г.Ю. Северин // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2006. – № 2. – С. 36–45.
7. Арнольд, В.И. Особенности дифференцируемых отображений / В.И. Арнольд, А.Н. Варченко, С.М. Гусейн-Заде. – М.: МЦНМО, 2004. – 672 с.
8. Siersma, D. Singularities of Functions on Boundaries, Corners, etc. / D. Siersma // Quart. J. Oxford Ser. – 1981. – V. 32, № 125. – P. 119–127.
9. Гнездилов, А.В. Бифуркации критических торков для функционалов с 3-круговой симметрией / А.В. Гнездилов // Функциональный анализ. – 2000. – Т. 34, вып. 1. – С. 83–86.
10. Введение в топологию / Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко. – М.: Наука, 1995. – 416 с.

Екатерина Владимировна Бухонова, аспирант, кафедры «Математическое моделирование», Воронежский государственный университет (г. Воронеж, Российская Федерация), Воронеж, Университетская пл., 1, [ekaterina.vladimirova@atos.net](mailto:ekaterina.vladimirova@atos.net).

*Поступила в редакцию 17 мая 2014 г.*

---

**Bulletin of the South Ural State University.**  
**Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software",**  
**2014, vol. 7, no. 3, pp. 23–32.**

---

MSC 90C30

DOI: 10.14529/mmp140302

## The Form of Key Function in the Problem of Branching of Periodic Extremals with Resonance 1:1:1

*E. V. Bukhonova*, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation, [ekaterina.vladimirova@atos.net](mailto:ekaterina.vladimirova@atos.net)

This article contains a method for calculating approximately the standardized key functions in the problem of branching of periodic extremals of a continuously differentiable action functional near its minimum. The periodic extremals of such functionals are used as a prototype for periodic oscillations of dynamical systems, ferroelectric crystal phases, nonlinear periodic waves, as so on. Recently Karpova, Kopytin, Derunova, and Sapronov studied cycle bifurcations in dynamical systems using key equations and key functions in the cases of double resonances  $p_1 : p_2 : p_3$  with  $p_1 < p_2 < p_3$ . This article deals with the poorly understood case  $p_1 = p_2 = p_3 = 1$ . As a demonstration model, we consider an order six ODE. We use the Lyapunov–Schmidt method.

*Keywords:* continuously differentiable functional; extremal; circular symmetry; resonance; bifurcation; Lyapunov–Schmidt method.

## References

1. Darinskii B.M., Sapronov Yu. I., Zarev S.L. Bifurcations of Extremals of Fredholm Functionals. *Journal of Mathematical Sciences*, 2007, vol. 145, issue 6, pp. 5311–5453. DOI: 10.1007/s10958-007-0356-2
2. Karpova A.P., Kopytin N.A., Sapronov Yu.I. [The Key Equation in Dynamical Systems with 2-tuple Resonances]. *Matematicheskie modeli i operatornye uravneniya* [Symbolic Model and Operator Equations], 2009, vol. 6, pp. 51–58
3. Derunova E. V., Sapronov Yu. I. [Three-Mode Extremals' Bifurcations from the Minimum Point of Fredholm Functional in Terms of Circular Symmetric]. *Vestnik VGU. Seriya: Fizika. Matematika* [Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics], 2014, no. 1, pp. 64–77.
4. Darinskiy B.M., Kolesnikova I.V., Sapronov Yu.I. Branching phases crystal determines the thermodynamic potential of the sixth order. *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii* [Control Systems and Information Technology], 2009, no. 1 (35), pp. 72–76.
5. Zachepa A.V., Sapronov Yu. I. The Bifurcation of Extremals Fredholm Functional from a Degenerate Minimum Point with Feature 3-dimensional Assembly. *Sbornik trudov matematicheskogo fakul'teta VGU* [Proceedings of the Math. Faculty of VSU], 2005, issue 9, pp. 57–71.
6. Strygin V.V., Severin G.Yu. Bifurcation of Self-Oscillations of Small Synchronous Two Dynamical Systems with Similar Frequencies. *Vestnik VGU. Seriya: Sistemnyy Analiz i Informatsionnye Tekhnologii* [Proceedings of Voronezh State University. Series: System Analysis and Information Technologies], 2006. no. 2. pp. 36–45.
7. Arnold V.I., Varchenko A.N., Husein-Zade S.M. *Features Differentiable Maps. Classification of Critical Points Caustics and Wave Fronts*. Moskow, 1982.
8. Siersma D. Singularities of Functions on Boundaries, Corners, etc. *Quart. J. Oxford Ser.*, 1981, vol. 32, no. 125, pp. 119–127. DOI: 10.1093/qmath/32.1.119
9. Gnezdilov A.V. [Bifurcation of Critical Tori for Functionals with 3–circular Symmetry]. *Funktsional'nyy analiz* [Function Analysis], 2000, vol. 34, no. 1, pp. 83–86.
10. Borisovich Yu.G., Bliznaykov N.M., Izreleevich Ya.A., Fomenko T.N. *Vvedenie v topologiyu* [Introduction to Topology]. Moskow, Nauka, 1995. 416 p.

*Received May 17, 2014*