УДК 532.529 DOI: 10.14529/mmp140304

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГАЗОВЗВЕСИ С ХИМИЧЕСКИМИ ПРЕВРАЩЕНИЯМИ В ПРИБЛИЖЕНИИ ПАРНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Ю.М. Ковалев, Е.Е. Пигасов

В данной работе предложена математическая модель, описывающая переход горения во взрыв твердого унитарного топлива в двухфазной гетерогенной среде: газ – твердые частицы, инвариантная относительно преобразования Галилея. Проведенный анализ существующих математических моделей, описывающих переход горения во взрыв твердого унитарного топлива в двухфазной гетерогенной среде: газ – твердые частицы, показал, что они не являются инвариантными относительно преобразования Галилея. Были подробно изучены причины, приводящие законы сохранения к не инвариантности относительно преобразования Галилея, которые были устранены в математической модели перехода горения во взрыв твердого унитарного топлива в двухфазной гетерогенной среде: газ – твердые частицы, предложенной в работе.

Ключевые слова: математическая модель; инвариантность; многокомпонентная смесь; гетерогенная среда.

Введение

Отсутствие в природе чистых веществ требует активного развития математических моделей гетерогенных сред, достоверно описывающих изучаемые процессы. Данные математические модели находят широкое применение в различных отраслях науки и техники.

Перспективное использование взрывных процессов в ряде отраслей современной техники тесно связано с решением вопросов обеспечения мер безопасности, защиты инженерных сооружений и технологического оборудования от действия ударных волн (УВ). В связи с этим важное прикладное значение представляет изучение проблемы локализации механических эффектов взрыва и ослабления УВ с помощью математического моделирования данных физических процессов.

В настоящее время на практике ослабление УВ в газе осуществляется путем применения различных экранирующих систем в виде сплошных, перфорированных и разрушающихся перемычек. Один из основных недостатков сплошных и перфорированных перемычек состоит в их весьма большой материалоемкости и соответственно большой величине объемного содержания α твердого конденсированного вещества ($\alpha \approx 1 \div 0,1$). Указанный недостаток в меньшей степени относится к перемычкам, разрушающимся при взаимодействии с УВ и образующим экранирующие слои или завесы из пены или аэровзвесей [1]. Поэтому с особой остротой встает проблема разработки математических моделей многокомпонентных гетерогенных сред [2], адекватных тем физическим процессам, которые они пытаются описывать. Более того, для быстропротекающих процессов есть такие проблемы, когда математическое моделирование является единственным средством предварительного изучения явлений [3, 4]. Для верификации расчетов, с одной стороны, используют известные экспериментальные данные, а с другой стороны, при анализе проведенных измерений используют математические модели. Очень важно, чтобы условия проведения расчетов и экспериментов совпадали, а математическая модель была адекватна изучаемому физическому процессу [5, 6].

Анализ инвариантности относительно преобразования Галилея математических моделей аэровзвеси [7, 8], активно применяемых для математического моделирования перехода конвективного горения унитарного твердого топлива во взрыв, показал, что они не являются инвариантными относительно преобразования Галилея [9, 10]. Поэтому в данной работе был проведен анализ причин, приводящих к не инвариантности относительно преобразования Галилея, и предложен подход к построению математической модели перехода конвективного горения унитарного твердого топлива во взрыв, инвариантной относительно преобразования Галилея.

1. Математическая модель газовзвеси

Рассмотрим одномерный плоский случай математической модели течения газа с твердыми частицами (аэровзвесь), которая описывается системой уравнений сохранения [11], и проведем оценку ее на инвариантность относительно преобразования Галилея.

Система уравнений сохранения двухфазной аэровзвеси [11] без химических превращений имеет следующий вид

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_2}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n v_2}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

$$\rho_1 \frac{d_1 v_1}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} - nR, \qquad \rho_2 \frac{d_2 v_2}{dt} = nR, \tag{2}$$

$$\rho_1 \frac{d_1 e_1}{dt} = \frac{p\alpha_1}{(\rho_1^\circ)} \frac{d_1 \rho_1^\circ}{dt} + nR(v_1 - v_2) - nq, \tag{3}$$

$$\rho_2 \frac{d_2 e_2}{dt} = \frac{p\alpha_2}{(\rho_2^\circ)} \frac{d_2 \rho_2^\circ}{dt} + nq, \tag{4}$$

$$p = p_1(\rho_1^\circ, T_1) = p_2(\rho_2^\circ, T_2), \quad e_1 = e_1(\rho_1^\circ, T_1), \quad e_2 = e_2(\rho_2^\circ, T_2),$$
$$\rho_1 = \rho_1^\circ \alpha_1, \quad \rho_2 = \rho_2^\circ \alpha_2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad E_i = e_i + \frac{v_i^2}{2} \ \ (i = 1, 2).$$

Здесь индексы 1, 2 относятся соответственно к газу и частицам; ρ_i°, α_i $(i = 1, 2)$ – истинные плотности и объемные содержания фаз; ρ_i, v_i, T_i, e_i, E_i – парциальная плотность, скорость, температура, внутренняя и полная энергия i-ой фазы; p – давление, n – число частиц в единице объема смеси. Уравнения (1) – уравнения неразрывности газа и частиц и уравнение сохранения числа частиц в единице объема смеси; (2) – уравнения импульса газа и частиц; (3) и (4) – уравнения сохранения внутренней энергии газа и частиц.

Получим уравнения сохранения кинетической энергии газовой и конденсированной фаз.

Умножая уравнение сохранения импульса газовой фазы на v_1, а уравнение сохранения импульса конденсированной фазы на v_2, получим уравнения сохранения кинетической энергии газа и частиц соответственно

$$v_1 \left[\frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_1^2}{\partial x} \right] = -v_1 \frac{\partial p}{\partial x} - nRv_1,$$

$$v_1 \left[\frac{\partial \rho_2 v_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_2^2}{\partial x} \right] = nRv_2,$$

которые после простых преобразований принимают следующий вид

$$\frac{\partial \rho_1 \frac{v_1^2}{2}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_1 \frac{v_1^2}{2}}{\partial x} = -v_1 \frac{\partial p}{\partial x} - nRv_1, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \rho_2 \frac{v_2^2}{2}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_2 \frac{v_2^2}{2}}{\partial x} = nRv_2. \tag{6}$$

Проведем анализ инвариантности относительно преобразования Галилея уравнений сохранения (1), (2), (5) и (6).

Запишем уравнения (1), (2), (5) и (6) в новой системе координат, движущейся с постоянной скоростью D. Скорости в новой системе координат будут равны:

$$v_{1\text{н}} = v_1 + D, \tag{7}$$

$$v_{2\text{н}} = v_2 + D. \tag{8}$$

Координата будет определяться из уравнения:

$$x_{\text{н}} = x + Dt. \tag{9}$$

Производные:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_{\text{н}}}, \tag{10}$$

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big) = \Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big) + \Big(\frac{\partial}{\partial x_{\text{н}}}\Big) D. \tag{11}$$

Легко показать [9, 10], что уравнения (1), (2), (5) и (6) инвариантны относительно преобразования Галилея.

Преобразуем левые части уравнений сохранения внутренней энергии газа и частиц. С учетом равенств (1) они могут быть представлены в виде

$$\frac{\partial \rho_1 e_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 e_1 v_1}{\partial x} = \frac{p\alpha_1}{(\rho_1^\circ)} \frac{d_1 \rho_1^\circ}{dt} + nR(v_1 - v_2) - nq, \tag{12}$$

$$\frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 e_2 v_2}{\partial x} = \frac{p\alpha_2}{(\rho_2^\circ)} \frac{d_2 \rho_2^\circ}{dt} + nq. \tag{13}$$

Из уравнений неразрывности газовой и конденсированной фаз (1) легко получить следующие равенства

$$\alpha_1 \frac{d_1 \rho_1^\circ}{dt} = -\rho_1^\circ \Big(\frac{\partial \alpha_1}{dt} + \frac{\partial \alpha_1 v_1}{\partial x}\Big),$$

$$\alpha_2 \frac{d_2 \rho_2^\circ}{dt} = -\rho_2^\circ \Big(\frac{\partial \alpha_2}{dt} + \frac{\partial \alpha_2 v_2}{\partial x}\Big).$$

Подставляя данные выражения в уравнения (12) и (13) соответственно, получим

$$\frac{\partial \rho_1 e_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 e_1 v_1}{\partial x} = -p\Big(\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_1 v_1}{\partial x}\Big) + nR\,(v_1 - v_2) - nq, \tag{14}$$

$$\frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 e_2 v_2}{\partial x} = -p\Big(\frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_2 v_2}{\partial x}\Big) + nq. \tag{15}$$

Очевидно, что уравнения сохранения внутренней энергии газовой (3) и конденсированной (4) фаз, преобразованные к виду (14) и (15), инвариантны относительно преобразования Галилея.

Получим уравнение сохранения полной энергии смеси. Для этого суммируем левые и правые части уравнений (5), (6), (14), (15). В результате получим

$$\frac{\partial(\rho_1 E_1+\rho_2 E_2)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho_1 v_1 E_1+\rho_2 v_2 E_2+\left(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2\right)p\right]=-\alpha_2\left(v_1-v_2\right)\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad (16)$$

которое не совпадает с уравнением сохранения полной энергии смеси, полученным в работе [7, 11].

Для того, чтобы убрать это несоответствие, необходимо разделить силу взаимодействия между фазами R на две части [12]: на составляющую из-за воздействия макроскопического поля давлений – $\alpha_2\frac{\partial p}{\partial x}$, которая не связана со скоростной неравновесностью между фазами, и составляющую f , которая связана с несовпадением скоростей

$$nR=-\alpha_2\frac{\partial p}{\partial x}+nf.$$

Подставляя полученное выражение в равенства (2) и преобразовывая левые части этих равенств к дивергентному виду, получим

$$\frac{\partial\rho_1 v_1}{\partial t}+\frac{\partial\rho_1 v_1^2}{\partial x}=-\alpha_1\frac{\partial p}{\partial x}-nf, \qquad (17)$$

$$\frac{\partial\rho_2 v_2}{\partial t}+\frac{\partial\rho_2 v_2^2}{\partial x}=-\alpha_2\frac{\partial p}{\partial x}+nf. \qquad (18)$$

К системе уравнений (1), (17) и (18) добавляются уравнения сохранения внутренней и кинетической энергии

$$\frac{\partial\rho_1 e_1}{\partial t}+\frac{\partial\rho_1 e_1 v_1}{\partial x}=-p\Big(\frac{\partial\alpha_1}{\partial t}+\frac{\partial\alpha_1 v_1}{\partial x}\Big)+nf\left(v_1-v_2\right)-nq, \qquad (19)$$

$$\frac{\partial\rho_2 e_2}{\partial t}+\frac{\partial\rho_2 e_2 v_2}{\partial x}=-p\Big(\frac{\partial\alpha_2}{\partial t}+\frac{\partial\alpha_2 v_2}{\partial x}\Big)+nq, \qquad (20)$$

$$\frac{\partial\rho_1\frac{{v_1}^2}{2}}{\partial t}+\frac{\partial\rho_1 v_1\frac{v_1^2}{2}}{\partial x}=-\alpha_1 v_1\frac{\partial p}{\partial x}-nfv_1, \qquad (21)$$

$$\frac{\partial\rho_2\frac{{v_2}^2}{2}}{\partial t}+\frac{\partial\rho_2 v_2\frac{v_2^2}{2}}{\partial x}=-\alpha_2 v_2\frac{\partial p}{\partial x}+nfv_2. \qquad (22)$$

В этом случае уравнение сохранения полной энергии смеси будет иметь вид, совпадающий с предлагаемым в работе в [7, 11]

$$\frac{\partial(\rho_1 E_1+\rho_2 E_2)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho_1 v_1 E_1+\rho_2 v_2 E_2+\left(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2\right)p\right]=0. \qquad (23)$$

Легко показать, что уравнения (17) – (23) инвариантны относительно преобразования Галилея [9, 10].

2. Определение функциональной зависимости силы межфазного взаимодействия

При проведении анализа инвариантности относительно преобразования Галилея законов сохранения, описывающих поведение газовзвесей, предполагалось, что выражение для силы межфазного взаимодействия является инвариантным. Это возможно в том случае, когда силы межфазного взаимодействия являются функциями разности скоростей f_1 (сила Стокса) и функциями разности ускорений f_2 (сила присоединенных масс) [7, 8]. Явный учет выражения для силы присоединенных масс, проведенный в работе [7, 8], приводит к следующим уравнениям сохранения импульса газовой и конденсированной фаз [7, 8]

$$\frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_1^2}{\partial x} + \alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x} = -n f_1, \tag{24}$$

$$\frac{\partial \rho_2 v_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_2^2}{\partial x} + \frac{3}{2}\alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x} = n f_1. \tag{25}$$

Из уравнений (24) и (25) следует, что уравнения сохранения кинетической энергии газовой и конденсированных фаз имеют следующий вид

$$\frac{\partial \rho_1 \frac{{v_1}^2}{2}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_1 \frac{v_1^2}{2}}{\partial x} + \alpha_1 v_1 \frac{\partial p}{\partial x} = -n f_1 v_1, \tag{26}$$

$$\frac{\partial \rho_2 \frac{{v_2}^2}{2}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_2 \frac{v_2^2}{2}}{\partial x} + \frac{3}{2}\alpha_{2} v_2 \frac{\partial p}{\partial x} = n f_1 v_2. \tag{27}$$

Легко показать, что уравнения (24) – (27) являются инвариантными относительно преобразования Галилея.

Рассмотрим уравнение сохранения полной энергии смеси (23) и проведем его анализ на инвариантность относительно преобразования Галилея, используя уравнения сохранения (1), (24) – (27). Используя формулы перехода к новой системе координат (7) – (11), получим

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \left(\rho_1 \left(e_1 + \frac{(v_{1н} - D)^2}{2}\right) + \rho_2 \left(e_2 + \frac{(v_{2н} - D)^2}{2}\right)\right)}{\partial t} + \\
+ \frac{\partial \left(\rho_1 \left(e_1 + \frac{(v_{1н} - D)^2}{2}\right) + \rho_2 \left(e_2 + \frac{(v_{2н} - D)^2}{2}\right)\right)}{\partial x_н} D + \\
+ \frac{\partial}{\partial x}\Big[\rho_1 (v_{1н} - D) \left(e_1 + \frac{(v_{1н} - D)^2}{2}\right) + \rho_2 (v_{2н} - D) \left(e_2 + \frac{(v_{2н} - D)^2}{2}\right) + \\
+ (\alpha_1 (v_{1н} - D) + \alpha_2 (v_{2н} - D))\, p\Big] = 0.
\end{gathered}$$

После простых алгебраических преобразований получаем:

$$\frac{\partial\rho_1(e_1+\frac{v_{1н}^2}{2})}{\partial t}+\frac{\partial\rho_2(e_2+\frac{v_{2н}^2}{2})}{\partial t}+\frac{D^2}{2}\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\frac{\partial\rho_1 v_{1н}}{\partial x_н}\right)+\frac{D^2}{2}\left(\frac{\partial\rho_2}{\partial t}+\frac{\partial\rho_2 v_{2н}}{\partial x_н}\right)-$$
$$-D\left(\frac{\partial\rho_1 v_{1н}}{\partial t}+\frac{\partial\rho_1 v_{1н}^2}{\partial x_н}+\alpha_1\frac{\partial p}{\partial x_н}\right)-D\left(\frac{\partial\rho_2 v_{2н}}{\partial t}+\frac{\partial\rho_2 v_{2н}^2}{\partial x_н}+\frac{3}{2}\alpha_2\frac{\partial p}{\partial x_н}\right)+$$
$$+\frac{D}{2}\alpha_2\frac{\partial p}{\partial x_н}+\frac{\partial\rho_1 v_{1н}\left(e_1+\frac{v_{1н}^2}{2}\right)}{\partial x_н}+\frac{\partial\rho_2 v_{2н}\left(e_2+\frac{v_{2н}^2}{2}\right)}{\partial x_н}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_н}\left[(\alpha_1 v_{1н}+\alpha_2 v_{2н})\,p\right]=0.$$

Согласно (1) сумма третьего и четвертого слагаемых обращается в ноль, а пятое и шестое слагаемые согласно (24) и (25) будут равны Df_1 и $-Df_1$. В результате получим:

$$\frac{\partial(\rho_1 E_{1н}+\rho_2 E_{2н})}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho_1 v_{1н}E_{1н}+\rho_2 v_{2н}E_{2н}+(\alpha_1 v_{1н}+\alpha_2 v_{2н})\,p\right]+\frac{D}{2}\alpha_2\frac{\partial p}{\partial x_н}=0. \tag{28}$$

В новой системе координат в уравнении полной энергии смеси (28) появился дополнительный член

$$\frac{D}{2}\alpha_2\frac{\partial p}{\partial x_н},$$

который приводит к не инвариантности относительно преобразования Галилея уравнение полной энергии смеси. Появление дополнительного члена в уравнении сохранения полной энергии смеси связано с явным учетом силы присоединенных масс f_2, которая зависит от разности ускорений фаз. Следовательно, для того, чтобы не нарушалась инвариантность законов сохранения, описывающих поведение газовзвесей, сила межфазного взаимодействия должна быть только функцией разности скоростей фаз $f=f_1(v_1-v_2)$.

3. Математическая модель газовзвеси с химическими превращениями

В результате проведенного анализа была уточнена математическая модель, описывающая поведение газовзвесей. Полагая далее возможность химического превращения в конденсированной фазе, запишем законы сохранения в следующем виде [11]

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\frac{\partial\rho_1 v_1}{\partial x}=nJ,\quad \frac{\partial\rho_2}{\partial t}+\frac{\partial\rho_2 v_2}{\partial x}=-nJ,\quad \frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial n v_2}{\partial x}=\psi, \tag{29}$$

$$\rho_1\frac{d_1 v_1}{dt}=-\alpha_1\frac{\partial p}{\partial x}-nf+nJ(v_*-v_1), \tag{30}$$

$$\rho_2\frac{d_2 v_2}{dt}=-\alpha_2\frac{\partial p}{\partial x}+nf-nJ(v_*-v_2), \tag{31}$$

$$\rho_1\frac{d_1 e_1}{dt}=\frac{p\alpha_1}{(\rho_1^\circ)}\frac{d_1\rho_1^\circ}{dt}+nf(v_1-v_2)- \tag{32}$$
$$-nq+nJ\frac{(v_*-v_1)^2}{2}+nJ(i_*-i_1),$$

$$\rho_2 \frac{d_2 e_2}{dt} = \frac{p\alpha_2}{(\overset{\circ}{\rho_2})} \frac{d_2 \overset{\circ}{\rho_2}}{dt} + nq - nJ\frac{(v_* - v_2)^2}{2} - nJ(i_* - i_2). \quad (33)$$

Здесь J характеризует интенсивность химического превращения, i_* – энтальпия. С помощью уравнений (29) приведем правые части уравнений сохранения импульса газа (30) и частиц (31) к дивергентному виду. В результате простых преобразований получим законы сохранения импульса газа и частиц в виде

$$\frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_1^2}{\partial x} = -\alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x} - nf + nJv_*, \quad (34)$$

$$\frac{\partial \rho_2 v_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_2^2}{\partial x} = -\alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x} + nf - nJv_*. \quad (35)$$

С помощью уравнений (29) и уравнений сохранения импульса газа (34) и частиц (35) очень просто получаются уравнения сохранения кинетической энергии газа и частиц в виде

$$\frac{\partial \rho_1 \frac{{v_1}^2}{2}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_1 \frac{v_1^2}{2}}{\partial x} = -\alpha_1 v_1 \frac{\partial p}{\partial x} - nfv_1 + nJv_* v_1 - nJ\frac{v_1^2}{2}, \quad (36)$$

$$\frac{\partial \rho_2 \frac{{v_2}^2}{2}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_2 \frac{v_2^2}{2}}{\partial x} = -\alpha_2 v_2 \frac{\partial p}{\partial x} + nfv_2 - nJv_* v_2 + nJ\frac{v_2^2}{2}. \quad (37)$$

С помощью уравнений (29) приведем правые части уравнений сохранения внутренней энергии газа (32) и частиц (33) к дивергентному виду. В результате простых преобразований получим законы сохранения импульса газа и частиц в виде

$$\frac{\partial \rho_1 e_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 e_1 v_1}{\partial x} = -p\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_1 v_1}{\partial x}\right) - nq + \quad (38)$$
$$+ nf\,(v_1 - v_2) + nJ\frac{(v_* - v_1)^2}{2} + nJi_*,$$

$$\frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 e_2 v_2}{\partial x} = -p\left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_2 v_2}{\partial x}\right) + \quad (39)$$
$$+ nq - nJ\frac{(v_* - v_2)^2}{2} + nJi_*.$$

Не представляет труда показать, что система уравнений (29), (34) – (39) инвариантна относительно преобразования Галилея [9]. Суммируя левые и правые части уравнений сохранения кинетической энергии газа (36) и частиц (37) с левыми и правыми частями уравнений сохранения внутренней энергии газа (38) и частиц (39) соответственно, получим уравнение сохранения полной энергии смеси (23).

Замыкая систему уравнений (29), (34), (35), (38) и (39) уравнениями состояния газа и частиц

$$e_1 = c_p\,(T_1 - T_0) - \frac{p}{\overset{\circ}{\rho_1}}, \qquad p = \frac{\overset{\circ}{\rho_1} R_1 T_1}{1 - \beta \overset{\circ}{\rho_1}}\ , \quad (40)$$

$$e_2 = c_2\,(T_2 - T_0) + Q^{\circ} - \frac{p}{\overset{\circ}{\rho_2}}, \qquad i_i = e_i + \frac{p}{\overset{\circ}{\rho_i}}, \quad (41)$$

а так же соотношениями, описывающими интенсивность силового, теплового и химического взаимодействия между фазами

$$f = \pi d^2 \overset{\circ}{\rho}_1 C_d \left(v_1 - v_2\right) \left|v_1 - v_2\right| /8, \tag{42}$$

$$q = \pi d \lambda_1 Nu \left(T_1 - T_2\right), \quad J = \pi d^2 \overset{\circ}{\rho}_2 u_s \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\varphi}, \tag{43}$$

получаем замкнутую математическую модель для описания перехода горения газовзвеси во взрыв, инвариантную относительно преобразования Галилея. Здесь T_i – температура; Q° – теплота химической реакции при $T_2 = T_0$, $p = p_0$; p – давление, β – ковольюм; c_p и c_2 – теплоемкости фаз; λ_1 – теплопроводность газовой фазы; R_1 – универсальная газовая постоянная; C_d и Nu – коэффициент трения и число Нуссельта, определяемые числами Рейнольдса (Re) и Прандтля (Pr) относительного движения фаз; d – диаметр частиц, u_s и ϕ – эмпирические константы, характеризующие скорость горения топлива.

Авторы выражает свою благодарность профессору В.Ф. Куропатенко за полезные обсуждения и интерес к работе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ грант №13 – 01 – 00072.

Литература

1. Ковалев, Ю.М. Ослабление воздушных ударных волн системой решеток / Ю.М Ковалев, А.Ю. Черемохов // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов. – 1997. – Вып. 3. – С. 39–43.

2. Куропатенко, В.Ф. Новые модели механики сплошных сред / В.Ф. Куропатенко // Инженерно- физический журнал. – 2011. – Т. 84, № 1. – С. 74–92.

3. Гришин, А.М. Экспериментальное исследование воздействия взрыва конденсированных ВВ на фронт верхового лесного пожара / А.М. Гришин, Ю.М. Ковалев // Доклады Академии наук. – 1989. – Т. 308, № 5. – С. 1074–1078.

4. Гришин, А.М. Экспериментальное и теоретическое исследование взаимодействия взрыва на фронт верхового лесного пожара / А.М. Гришин, Ю.М. Ковалев // Физика горения и взрыва. – 1989. – Т. 25, № 6. – С. 72–79.

5. Ковалев, Ю.М. Анализ инвариантности некоторых математических моделей многокомпонентных сред / Ю.М. Ковалев, В.Ф. Куропатенко // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2012. – Вып. 6, № 11. – С. 4–7.

6. Ковалев, Ю.М. Анализ инвариантности относительно преобразования Галилея некоторых моделей математических многокомпонентных сред / Ю.М. Ковалев, В.Ф. Куропатенко // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 27 (286), вып. 13. – С. 69–73.

7. Нестационарные задачи горения аэровзвесей унитарного топлива / П.Б. Вайнштейн, Р.И. Нигматулин, В.В. Попов, Х.А. Рахматулин // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1981. – Вып. 3. – С. 39–43.

8. Baer, M. F. Two-Phase Mixture Theory for the Deflagration-to-Detonation Transition (DDT) in Reactive Granular Materials / M. F. Baer, J. Nunziato // Int. J. Multiphase Flow. – 1986. – V. 12. – P. 861–889.

9. Ковалев, Ю.М. Анализ инвариантности относительно преобразования Галилея двухфазных математических моделей гетерогенных сред / Ю.М. Ковалев// Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2014. – Т. 6, № 1. – С. 30–35.

10. Ковалев, Ю.М.. Математический анализ уравнения сохранения двухфазных смесей / Ковалев Ю.М., Ковалева Е.А. // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 2. – С. 29–37.

11. Ивандаев, А.И. Газовая динамика многофазных сред. Ударные и детонационные волны в газовзвесях / А.И. Ивандаев, А.Г. Кутушев, Р.И. Нигматулин // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. – М.: ВИНИТИ, 1981. – Т. 16. – С. 209–287.

12. Нигматулин, Р.И. Основы механики гетерогенных сред / Р.И. Нигматулин . – М.: Наука, 1978. – 336 с.

Юрий Михайлович Ковалев, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Вычислительная механика сплошных сред», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), yum_kov@mail.ru.

Егор Евгеньевич Пигасов, ассистент кафедры «Вычислительная механика сплошных сред», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), pigasovee@mail.ru.

Поступила в редакцию 1 июня 2014 г.

**Bulletin of the South Ural State University.
Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software",
2014, vol. 7, no. 3, pp. 40–49.**

MSC 76L05 **DOI: 10.14529/mmp140304**

A Mathematical Model of Gas Suspension with Chemical Reactions in the Pair-Interaction Approximation

Yu.M. Kovalev, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, yum_kov@mail.ru***,***
E.E. Pigasov, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, pigasovee@mail.ru

In this paper we propose a mathematical model describing the transition of solid unitary fuel from combustion to explosion in a two-phase heterogeneous gas-solid environment. The model is invariant under the Galilean transformations. It turned out that the existing mathematical models of this phenomenon lack invariance under the Galilean transformations. We studied in detail the reasons making the conservation laws not invariant and eliminated them in the model we propose.

Keywords: mathematical model; invariance; multi-component mixture; heterogeneous environments.

References

1. Kovalev Yu.M., Cheremokhov A.Yu. [Weakening of Air Shock Waves System Lattices]. *Problems of Atomic Science and Technology. Series: Mathematical Modelling of Physical Processes*, 1997, vol. 3, pp. 39–43. (in Russian)
2. Kuropatenko V.F. New Models of Continuum Mechanics. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2011, vol. 84, no. 1, pp. 77–99. DOI: 10.1007/s10891-011-0457-0
3. Grishin A.M., Kovalev Yu.M. [Experimental Study on the Impact of the Explosion of Condensed Explosives to the Front Crown Forest Fire]. *Doklady Akademii Nauk*, 1989, vol. 308, no. 5, pp. 1074–1078. (in Russian)
4. Grishin A.M., Kovalev Yu.M. Experimental and Theoretical Investigation of the Effect of an Explosion on the Front of Crown Forest Fires. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 1989, vol. 25, no. 6, pp. 724–730. DOI: 10.1007/BF00758739
5. Kovalev Yu.M., Kuropatenko V.F. [Analysis of the Invariance of Some Mathematical Models of Multi-Media]. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics*, 2012, no. 11 (270), pp. 4–7. (in Russian)
6. Kovalev Yu.M., Kuropatenko V.F. [Analysis of the Invariance under the Galilean Transformation of Some Mathematical Models of Multi-Media]. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, 2012, no. 27 (286), pp. 69–73. (in Russian)
7. Vainshtein P.B., Nigmatulin R.I., Popov V.V., Rakhmatulin H.A. Nonstationary Problems of the Combustion of Aerosuspensions in Fuel that Contains the Oxidant. *Fluid Dynamics*, 1981, vol. 16, issue 1, pp. 14–19. DOI: 10.1007/BF01094807
8. Baer M., Nunziato J. F Two-Phase Mixture Theory for the Deflagration-to-Detonation Transition (DDT) in Reactive Granular Materials. *Int. J. Multiphase Flow*, 1986, vol. 12, pp. 861–889. DOI: 10.1016/0301-9322(86)90033-9
9. Kovalev Yu.M. [Analysis of Invariance under Galilean Transformations of Two-Phase Mathematical Models of Heterogeneous Enveronment]. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics*, 2014, vol. 6, no. 1, pp. 30–35. (in Russian)
10. Kovalev Yu.M., Kovaleva E.A. Mathematical Analysis of Two-Phase Mixtures of Conservation. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, 2014, vol. 7, no. 2, pp. 29–37. (in Russian)
11. Ivandeev A.I., Kutushev A.G., Nigmatulin R.I. [Gas Dynamics of Multiphase Media. Shock and Detonation Waves in Gas Suspensions]. *Itogi nauki i tekhniki. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Results of Science and Technology. Series: Fluid Mechanics], 1981. vol. 16, pp. 209–287. (in Russian)
12. Nigmatulin R.I. *Osnovi mehaniki geterogennih sred* [Fundamentals of Mechanics of Heterogeneous Enveronment]. Moscow, 1978. 336 p.

Received June 1, 2014