УДК 517.9 DOI: 10.14529/mmp140306

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

М.Н. Небольсина, С.Х.М. Аль Кхазраджи

В работе методом теории полугрупп линейных преобразований устанавливается равномерно корректная разрешимость начально-краевых задач для одного класса интегрально-дифференциальных уравнений, рассматриваемых в ограниченной и полуограниченной областях, которые описывают процессы нестационарной фильтрации сжимающей жидкости в пористой среде. Частный случай таких уравнений на полубесконечной прямой с условием Дирихле на границе рассматривался в работе Ю.И. Бабенко. В этой работе требовалось найти градиент давления на границе области. Здесь ответ получен формальным применением дробного интегро-дифференцирования, не затрагивая вопроса о корректной разрешимости и устойчивости решения к погрешностям по исходным данным. При этом решение задачи представляется в виде формального ряда с неограниченным оператором, сходимость которого также не обсуждается. Метод теории сильно непрерывных полугрупп преобразований позволяет установить равномерно корректную разрешимость задач Дирихле и Неймана как для конечных так и бесконечных областей. Это дает возможность в случае задачи Дирихле корректно вычислить градиент давления на границе и значение решения на границе в случае условий Неймана. Здесь же доказана устойчивость решения по начальным данным.

Ключевые слова: процессы фильтрации, пористая среда; корректные задачи; C_0-*полугруппы; дробные степени операторов.*

Введение

В [1, с. 101] при исследовании процессов фильтрации в пористой среде для $x \in (0, \infty)$ и $t \in (0, \infty)$ рассматривается задача отыскания давления $p(t, x)$, удовлетворяющее уравнению

$$a\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2} = \nu\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} + (1-\nu)p(t,x) -$$

$$-(1-\nu)\gamma^2\int_0^t e^{\gamma(s-t)}p(s,x)ds = \mathrm{L}_t p(t,x) \tag{1}$$

и начально-краевым условиям

$$p(0,x) = 0, \tag{2}$$

$$p(t,0) = q(t), \lim_{x\to\infty} p(t,x) = 0. \tag{3}$$

Здесь ν — доля объема проточных зон, γ — константа массообмена между проточными и застойными зонами, a — коэффициент пьезопроводимости.

Требуется найти градиент давления у границы области.

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial x}|_{x=0} = \varphi(t). \tag{4}$$

В [1] ответ дается в виде

$$\varphi(t) = \mathrm{L}_t^{\frac{1}{2}} q(t) = \sqrt{\frac{a}{\nu}}e^{-\gamma t}Me^{\gamma t}, \tag{5}$$

где неограниченный оператор M формально выписывается в виде ряда

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathrm{D}^{\frac{1}{2}-n}, \tag{6}$$

где $a_0 = 1, a_1 = \gamma(\beta - 1), a_n = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} a_{m-k}a_k, (k \geq 3)$, сходимость которого в [1], несмотря на неограниченность оператора $L_t^{\frac{1}{2}}$, не обсуждается. Формальное применение дробного интегро-дифференцирования в [1] также не затрагивает вопроса о корректной разрешимости краевой задачи (1) – (3). В частности, вопроса об устойчивости решения по исходным данным, который, как известно, является одним из основных при численной реализации соответствующего алгоритма. В то же время, результаты, полученные в [3] с применением методов теории полугрупп исследования корректной разрешимости краевых задач С.Г. Крейна [4], дающие в явном виде представление решения задачи (1) – (3), а также функции (4), позволили строить алгоритмы, лишенные указанных недостатков.

В настоящей работе методом теории сильно непрерывных полугрупп С.Г. Крейна устанавливается корректная разрешимость краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения (1), рассмотренного на конечном интервале $x \in [0, l]$. То есть нужно найти решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям:

а)

$$u(t,0) = \varphi_1(t), u(t,l) = \psi_1(t) \tag{7}$$

— задача Дирихле;

б)

$$u'_x(t,0) = \varphi_2(t), u'_x(t,l) = \psi_2(t) \tag{8}$$

— задача Неймана.

В предположении, что функции $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ дифференцируемы. И указать функциональные пространства $C_{\rho[0,\infty]}$ с нормами

$$\|\varphi\|_\rho = \sup_{t\in[0,\infty]} |\rho(t)\varphi(t)|, \rho(t) > 0,$$

для которых выполняются неравенства

$$\sup_{t\in[0,\infty]} |\rho(t)u(t,x)| \leq c[\|\varphi_i\|_\rho + \|\psi_i\|_\rho], \tag{9}$$

с константой c, независимой от φ_i и ψ_i.

Для решения этих задач нам понадобятся следующие результаты из общей теории (см. [3 с. 305], а также [7, 8]).

1. Необходимые факты из общей теории

В банаховом пространстве E рассматривается уравнение

$$\frac{d^2u}{dx^2} = Au(x), \qquad x \in [0, \pi], \tag{1.1}$$

где A — вообще говоря, неограниченный в E оператор с областью определения $D(A)$ такой, что оператор $-A$ является генератором сильно непрерывной полугруппы $U(t, -A)$, удовлетворяющей оценке

$$\|U(t, -A)\| \leq Me^{-\omega t}, \qquad \omega \geq 0. \tag{1.2}$$

Определение 1.1. Решением уравнения (1.1) будем называть функцию $u(x)$ со значениями в $D(A)$, дважды непрерывно дифференцируемую и удовлетворяющую (1.1) на отрезке $[0, l]$.

Определение 1.2. Задача Дирихле для уравнения (1.1)

$$u(0) = \varphi_1, u(l) = \psi_1, \tag{1.3}$$

называется корректной, если она однозначно разрешима для любых $\varphi_1, \psi_1 \in D(A)$, и существует $c_1 > 0$ такое, что для всех решений (1.1) справедливо неравенство

$$\sup_{x\in[0,l]} \|u(x)\|_E \leq c_1(\|\varphi_1\|_E + \|\psi_1\|_E). \tag{1.4}$$

Определение 1.3. Задача Неймана для уравнения (1.1)

$$u'(0) = \varphi_2, u'(l) = \psi_2, \tag{1.5}$$

называется корректной, если она однозначно разрешима для всех $\varphi_2, \psi_2 \in D(A)$, и существует $c_2 > 0$ такое, что для всех решений (1.1) справедливо неравенство случае

$$\sup_{x\in[0,l]} \|u(x)\|_E \leq c_2(\|\varphi_2\|_E + \|\psi_2\|_E). \tag{1.6}$$

В случае $l = \infty$ отыскиваются решения $u(x)$ в предположении ограниченности

$$\sup_{x\in[0,\infty)} \|u(x)\| < \infty \tag{1.7}$$

и удовлетворяющие условиям

$$u(0) = \varphi_3 \tag{1.8}$$

(задача Дирихле);

$$u'(0) = \varphi_4 \tag{1.9}$$

(задача Неймана).

И оценкам (1.4) и (1.6) соответствуют оценки

$$\sup_{x\in[0,l]} \|u(x)\|_E \leq c_1\|\varphi_3\|, \tag{1.10}$$

$$\sup_{x\in[0,l]} \|u(x)\|_E \leq c_2\|\varphi_4\|. \tag{1.11}$$

Отметим, что условие (1.2) обеспечивает корректную разрешимость рассматриваемых задач и справедливость следующих результатов. Для простоты изложения будем считать $l = \pi$. Из результатов А.В. Князюка [2] следует корректная разрешимость задачи Дирихле (1.1) – (1.3), и для ее решения получено представление

$$u(x) = F(x)\varphi_1 + F(\pi - x)\psi_1, \tag{1.12}$$

где

$$F(x)\varphi = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \cdot n(n^2 + A)^{-1}\varphi. \tag{1.13}$$

Если $\varphi_1 \in D(A)$, то

$$F(x)\varphi = (1 - \frac{x}{\pi})\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}(n^2 + A)^{-1}A\varphi. \tag{1.14}$$

Корректность задачи Неймана (1) – (4) показана М.Небольсиной в [8], при этом решение имеет вид

$$u(x) = S(x)\varphi_2 + S(\pi - x)\psi_2, \tag{1.15}$$

где

$$S(x)\varphi = \frac{1}{\pi}[A^{-1}\varphi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx(n^2 + A)^{-1}\varphi]. \tag{1.16}$$

Заметим, что из (1.13) и (1.16) следует соотношение

$$S'(x)\varphi = F(x)\varphi. \tag{1.17}$$

Если $\varphi \in D(A)$, то

$$F'(x)\varphi = -S(x)A\varphi. \tag{1.18}$$

Эти решения можно выразить и через полугруппу $U(t, -A)$, если воспользоваться формулой, связывающую резольвенту $R(x)$ и полугруппу генератора $-A$.

$$(n^2 + A)^{-1}\varphi = R(n^2, -A) = \int_0^{\infty} e^{-n^2 S}U(s, -A)\varphi ds. \tag{1.19}$$

Пользуясь (1.19) в (1.13) и (1.16) и меняя порядки суммирования и интегрирования, получаем представления

$$F(x)\varphi = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{d\Theta}{dx}(\frac{x}{2\pi}, \frac{is}{\pi})U(s, -A)\varphi ds, \tag{1.20}$$

$$S(x)\varphi = \frac{1}{\pi}A^{-1}\varphi + \int_0^{\infty}[\Theta(\frac{x}{2\pi}, \frac{is}{\pi}) - 1]U(s, -A)\varphi ds, \tag{1.21}$$

где $\Theta(z, i\mu)$- Θ – функция Якоби, вида

$$\Theta(z, i\mu) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} exp(-\pi n^2\mu)\cos(2\pi nz)$$

см.[5], с.13.

Корректная разрешимость задачи (1.1) – (1.8) показана С.Г. Крейном в [3 с. 324], при этом ее решение имеет вид

$$u(x)\varphi_3 = U(x, -(-A)^{\frac{1}{2}})\varphi_3. \tag{1.22}$$

Наконец корректная разрешимость задачи Неймана установлена Д.В.Костиным в [4], и решение имеет вид

$$u(x)\varphi_4 = -\int_x^{\infty} U(\tau, -(-A)^{\frac{1}{2}})\varphi_4 d\tau. \tag{1.23}$$

2. Постановка задач фильтрации в рамках общей теории

Для применения подхода, изложенного в п. 1, запишем уравнение (1) в виде

$$\frac{d^2p(x)}{dx^2} = Ap(x), \qquad x \in [0, \pi], x \in [0, \infty), \tag{2.1}$$

где оператор A задается дифференциальным выражением $\frac{1}{a}L_t$ и областью определения

$$D(A) = \{u \in E, \frac{du}{dt} \in E\}, \tag{2.2}$$

где E функциональные пространства.

При этом условия (7) и (8) при $l = \pi$ имеют вид

$$p(0) = \varphi_1, p(\pi) = \psi_1 \tag{2.3}$$

в случае задачи Дирихле;

$$\frac{dp(x)}{dx}|_{x=0} = \varphi_2, \frac{dp(x)}{dx}|_{x=\pi} = \psi_2, \tag{2.4}$$

в случае задачи Неймана.

Если $l = \infty$, то граничные условия принимают вид

$$p(0) = \varphi_3, \qquad \lim_{x\to\infty} \|p(x)\| = 0, \tag{2.5}$$

и

$$p'(0) = \varphi_4, \qquad \lim_{x\to\infty} \|p(x)\| = 0. \tag{2.6}$$

Таким образом, для установления корректной разрешимости исследуемых задач необходимо построить полугруппу $U(x, -A)$ и получить для нее оценку (1.2).

3. Построение полугруппы $U(x, -A)$

Оператор A представим в виде суммы $A = A_1 + A_2$, где оператор A_1 задается дифференциальным выражением

$$l_1 u(t) = \frac{\nu}{a}\frac{du(t)}{dt} + \frac{1-\nu}{a}u(t) \tag{3.1}$$

и областью определения $D(A_1) = \{u \in C_{[0,\infty)}, l_1 u \in C_{[0,\infty)}, u(0) = 0\}$. Оператор A_2 зададим интегральным оператором

$$A_2 u(t) = -\frac{1-\nu}{a}\gamma^2 \int_0^t e^{\gamma(s-t)}u(s)ds. \tag{3.2}$$

Нетрудно видеть, что оператор A_2 ограничен в $C_{[0,\infty)}$ в силу очевидной оценки

$$\|A_2 u\| \leq \frac{1-\nu}{a}\gamma\|u\|. \tag{3.3}$$

Заметим, что операторы A_1 и A_2 коммутируют на $D(A_1)$. Это следует из легко проверяемого равенства

$$\int_0^t e^{\gamma(s-t)}u'(s)ds = \frac{d}{dt}\int_0^t e^{\gamma(s-t)}u(s)ds. \tag{3.4}$$

Полугруппа $U(x, -A_1)$ с генератором A_1 имеет вид

$$U(x, -A_1)u(t) = e^{-\frac{1-\nu}{a}x}\begin{cases} u(t - \frac{\nu}{a}x), & \frac{\nu}{a}x \leq t; \\ 0, & \frac{\nu}{a}x > t. \end{cases} \tag{3.5}$$

Отсюда следует оценка

$$\|U(x, -A_1)\| \leq e^{-\frac{1-\nu}{a}x}. \tag{3.6}$$

Далее для получения представления полугруппы $U(x, -A_2)$ воспользуемся рядом

$$U(x, -A_2)u(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}(-A_2)^n u(t), \tag{3.7}$$

где

$$(-A_2)^n u(t) = \begin{cases} \frac{(1-\nu)^n\gamma^{2n}}{a^n(n-1)!}\int_0^t e^{-\gamma s}s^{n-1}u(t-s)ds, & n=1,2,...; \\ I, & n=0. \end{cases} \tag{3.8}$$

I-тождественный оператор.

Это дает оценку

$$\|A_2^n u\| \le \frac{(1-\nu)^n\gamma^{2n}}{a^n(n-1)!}\int_0^\infty e^{-\gamma s}s^{n-1}ds\|u\| = (\frac{1-\nu}{a})^n\gamma^n\|u\|. \tag{3.9}$$

Оценивая полугруппу (3.7), используя (3.8), получаем оценку

$$\|U(x,-A_2)u\| \le \|u\|\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1-\nu}{a})^n\frac{\gamma^n x^n}{n!} = e^{\frac{(1-\nu)\gamma}{a}x}\|u\|. \tag{3.10}$$

Теперь нетрудно видеть, что из (3.6) и (3.10) следует неравенство

$$\|U(x,-A)\| \le \|U(x,-A_1)\|\|U(x,-A_2)\| \le exp[-\frac{(1-\nu)(1-\gamma)}{a}]. \tag{3.11}$$

Далее, пользуясь (3.8) в (3.7), получаем представление

$$U(x,-A_2)u(t) = u(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\nu)^n\gamma^{2n}x^n}{a^n(n-1)!n!}\int_0^t e^{-\gamma s}s^{n-1}u(t-s)ds =$$

$$= u(t) + \int_0^t(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\nu)^n\gamma^{2n}x^n s^{n-1}}{a^n(n-1)!n!})e^{-\gamma s}u(t-s)ds =$$

$$= u(t) + x\frac{1-\nu}{a}\gamma^2\int_0^t e^{-\gamma s}I_1(2\gamma\sqrt{\frac{1-\nu}{a}xs})u(t-s)ds. \tag{3.12}$$

Здесь мы воспользовались соответствующим представлением функции Бесселя $I_1(z)$ первого рода (см. [5, с. 642]).

Теперь, пользуясь (3.5) и (3.12), получаем вид полугруппы $U(t,-A)$

$$U(x,-A)u(t) = U(x,-A_1)U(x,-A_2)u(t) =$$

$$= e^{-\frac{1-\nu}{a}x}\begin{cases} u(t-\frac{\nu}{a}x) + (1-\frac{\nu}{a})\gamma^2 x + & s \le t-\frac{\nu}{a}x; \\ +\int_0^{t-\frac{\nu}{a}x} I_1(2\gamma\sqrt{\frac{1-\nu}{a}xs})e^{-\gamma s}u(t-\frac{\nu}{a}x-s)ds, & \\ 0, & t-\frac{\nu}{a}x < s. \end{cases} \tag{3.13}$$

4. Вычисление характеристик потока на границе

Так как, исходя из изложенной выше общей теории, оценка (3.11) обеспечивает равномерную корректность задач (2.1) – (2.6), то представления решений (1.13) – (1.16), (1.22), (1.23) позволяют ответить на следующие вопросы, связанные с определением потока вещества на границе области:

А) Нахождение градиента давления у границы области по известному закону изменения давления на границе.

То есть вычисление значений

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial x}|_{x=0} = q_1(t), \qquad \frac{\partial p(t,x)}{\partial x}|_{x=\pi} = q_2(t), \tag{4.1}$$

в случае задачи (2.1) – (2.3), и

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial x}|_{x=0} = q_3(t), \tag{4.2}$$

в случае задачи (2.1) – (2.5).

В) Определение давления на границе области по заданному градиенту.

То есть вычисление значений:

$$p(t,0) = g_1(t), \qquad p(t,\pi) = g_2(t), \tag{4.3}$$

в случае задачи (2.1)-(2.4), и

$$p(t,0) = g_3(t), \tag{4.4}$$

в случае задачи (2.1)-(2.6).

Имея в виду соотношение $A = L_t$, и полугруппу $U(x,A) = U(x,L_t)$ вида (3.13), представления (1.15) и (1.16) позволяют дать следующие ответы в этих задачах.

А) Из (1.18) следуют равенства

$$q_1(t) = -L_t[S(0)\varphi_1(t) + S(\pi)\psi_1(t)]; \tag{4.5}$$

$$q_2(t) = -L_t[S(\pi)\varphi_1(t) + S(0)\psi_1(t)]. \tag{4.6}$$

Из (1.22) получаем

$$q_3(t) = (-L_t)^{\frac{1}{2}}\varphi_3(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tau^{-\frac{1}{2}} U(\tau, L_t)L_t\varphi_3(t)d\tau. \tag{4.7}$$

В) Равенства (1.15) и (1.23) дают соотношения

$$g_1(t) = S(0)\varphi_2(t) + S(\pi)\psi_2(t); \tag{4.8}$$

$$g_2(t) = S(\pi)\varphi_2(t) + S(0)\psi_2(t); \tag{4.9}$$

$$g_4(t) = -\int_0^\infty U(\tau, -(L_t)^{\frac{1}{2}})\varphi_4(t)d\tau = -L_t^{-\frac{1}{2}}\varphi(t). \tag{4.10}$$

Из полученных соотношений заключаем, что в силу оценок

$$\|S(0)\varphi\| \le \frac{1}{\pi}[\|A^{-1}\| + 2\sum_{n=1}^\infty \|(n^2+A)^{-1}\|]\|\varphi\| =$$

$$= \frac{1}{\pi}[\frac{1}{\omega} + 2\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2+\omega}]\|\varphi\| = \frac{ch\sqrt{\omega}\pi}{sh\sqrt{\omega}\pi}\|\varphi\| \tag{4.11}$$

$$\|\int_0^\infty U(\tau, -L_t)^{\frac{1}{2}}\varphi d\tau\| \le \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{2}}\tau}d\tau\|\varphi\| = \omega^{-\frac{1}{2}}\|\varphi\| \tag{4.12}$$

задачи (4.3) – (4.4) равномерно корректны в пространствах $C_{[0,\infty)}$, и их численная реализация носит стандартный характер.

Решение задач (4.1) – (4.2) выражается через неограниченный оператор L_t, и вследствие этого их численная реализация осуществляется с помощью соответствующих регуляризирующих методов. Но из разложения $L_t = \nu\frac{\partial}{\partial t} + L_0$, где L_0-неограниченный оператор, следует, что регуляризирующий алгоритм относится только к вычислению производной $\frac{\partial}{\partial t}$, что также реализуется по стандартной схеме.

Таким образом, из представлений (4.5) – (4.7) следует, что при решении задачи Дирихле, в частности задачи Ю.И. Бабенко (1) – (3), сначала нужно получить решение равномерно корректной задачи Неймана, а затем применить стандартный алгоритм вычисления производной.

Литература

1. Бабенко, Ю.И. Тепломассообмен, методы расчета тепловых и диффузионных потоков / Ю.И.Бабенко. – Л.: Химия, 1986. – 144 с.
2. Князюк, А.В. Граничные значения эволюционных уравнений в банаховом пространстве: дис. ... канд. физ.-мат. наук / А.В. Князюк. – Киев, 1985. – 115 с.
3. Крейн, С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. – М.: Наука, 1967.– 464 с.
4. Костин, Д.В. О третьей краевой задаче для уравнения эллиптического типа в банаховом пространстве на R^+ / Д.В. Костин // Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения – XXIII». – Воронеж: Изд. полиграф. центр ВГУ, 2012. – С. 97.
5. Лаврентьев, М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.П. Шабат. – М.: Наука, 1973.– 736 с.
6. Мамфорд, Д. Лекции о тэта-функциях: пер. с англ. / Д. Мамфорд – М.: Мир, 1988. – 448 с.
7. Костин, В.А. О корректной разрешимости краевых задач для уравнения второго порядка / В.А. Костин, М.Н. Небольсина // Доклады Академии Наук. – 2009. – Т. 428, №1. – С. 20–22.
8. Небольсина, М.Н. Исследование корректной разрешимости некоторых математических моделей тепломассопереноса методом С.Г. Крейна: дис. ... канд. физ.-мат. наук / М.Н. Небольсина. – Воронеж, ВГУ, 2009. – 102 с.

Марина Николаевна Небольсина, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Математическое моделирование», Математический факультет, Воронежский государственный университет (г. Воронеж, Российская Федерация), marinanebolsina@yandex.ru.

Аль Кхазраджи Сундус Хатем Маджид, аспирант, кафедра «Математическое моделирование», Математический факультет, Воронежский государственный университет (г. Воронеж, Российская Федерация), saohhatem@yahoo.com.

Поступила в редакцию 21 мая 2014 г.

Bulletin of the South Ural State University.
Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software",
2014, vol. 7, no. 3, pp. 60–68.

MSC 39-02 **DOI: 10.14529/mmp140306**

On the Well-Posedness of Some Problems of Filtration in Porous Media

M.N. Nebolsina, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation, marinanebolsina@yandex.ru**,**
Al Khazraji S.H.M., Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation, saohhatem@yahoo.com

Using the theory of semigroups of linear transformations, we establish the uniform well-posedness of initial-boundary value problems for a class of integrodifferential equations in bounded and half-bounded regions describing the processes of nonstationary filtration of squeezing liquid in porous media.

Babenko considered a particular case of these equations on the semi-infinite straight line with Dirichlet condition on the boundary. In that work it was required to find the pressure gradient on the boundary, and the answer is obtained by the formal application of fractional integro-differentiation while ignoring the question of continuous dependence on the intial data. The solution is expressed as a formal series involving an unbounded operator, whose convergence is not discussed.

The theory of strongly continuous semigroups of transformations enables us to establish the uniform well-posedness of the Dirichlet and Neumann problems for both finite and infinite regions. It enables us to calculate the pressure gradient on the boundary in the case of the Dirichlet problem and the boundary value of the solution in the case of the Neumann problem. We also prove that the solution is stable with respect to the initial data.

Keywords: filtration processes; porous media; well-posed problem; C_0-semigroups; fractional powers of operators.

References

1. Babenko Yu.I. *Teplomassoobmen, metody rascheta teplovyh i diffuzionnyh potokov* [Heat and Mass Transfer. The Method of Calculation of Heat and Diffusion Currents]. Leningrad, Chemistry, 1986.
2. Knyazyuk A.V. *Granichnye znacheniya evolyutsionnykh uravneniy v banakhovom prostranstve* [Boundary Values of Evolution Equations in a Banach Space. The Dissertation for Scientific Degree of the Candidate of Physical Mathematical Sciences]. Kiev, 1985. 115 p.
3. Krejn S.G. *Lineynye differential'nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in Banach Spaces]. Moscow, Nauka, 1967. 464 p.
4. Kostin D.V. [On the Third Boundary-Value Problem for Equations of Elliptic Type in a Banach Space on R^+]. *Materials of Voronezh Spring Mathematical School "Pontryagin Readings-XXIII"*, Voronezh, VSU, 2012, pp. 97.
5. Lavrent'ev M.A, Shabat B.V. *Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo* [Methods of the Theory of Functions of a Complex Variable]. Moscow, Nauka, 1973.
6. Mumford D. *Tata Lectures on Theta.* Boston, Basel, Berlin, Birkhlfuser, 1983. DOI: 10.1007/978-1-4899-2843-6
7. Kostin V.A., Nebol'sina M.N. Well-Posedness of Boundary Value Problems for a Second-Order Equation. *Doklady Mathematics*, 2009, vol. 80, no. 2, pp. 650–652. DOI: 10.1134/S1064562409050044
8. Nebolsina M.N. *Issledovanie korrektnoy razreshimosti nekotoryh matematicheskih modeley teplomassoperenosa metodom S.G.Kreina* [The Research of Correct Solvability of Some Mathematical Models of Heat and Mass Transfer Method S.G. Krein. The Dissertation for Scientific Degree of the Candidate Physical and Mathematical Sciences]. Voronezh, VSU, 2009. 102 p.

Received May 21, 2014