ОБЗОРНЫЕ СТАТЬИ

УДК 517.9 **DOI: 10.14529/mmp150301**

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССАМИ ФИЛЬТРАЦИИ И ДЕФОРМАЦИИ

Н.А. Манакова

В статье представлен обзор работ автора по изучению задачи оптимального управления для полулинейных моделей соболевского типа с s-монотонным и p-коэрцитивным операторами. Приводятся теоремы существования и единственности слабого обобщенного решения задачи Коши или задачи Шоуолтера – Сидорова для одного класса вырожденных неклассических моделей математической физики. Представленная теория базируется на методе фазового пространства и методе Галеркина – Петрова. Разработанная схема численного метода позволяет находить приближенные решения задачи Коши и задачи Шоуолтера – Сидорова для рассматриваемых моделей. Строится абстрактная схема изучения задачи оптимального управления данного класса моделей. На основе абстрактных результатов доказывается существование оптимального управления процессами фильтрации и деформации. Приводятся необходимые условия оптимального управления.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа; оптимальное управление; метод фазового пространства; метод Галеркина – Петрова.

Светлой памяти профессора Альфредо Лоренци посвящается

Введение

В связи с высоким темпом развития производства и техники возникает все большая потребность в построении и изучении математических моделей, в частности, описывающих процессы упругости и фильтрации. Проведение натурных экспериментов дорого, поэтому возможность изучения процесса при помощи математического моделирования достаточно актуальна. Большой класс математических моделей основан на полулинейных неклассических уравнениях в частных производных, не разрешенных относительно производной по времени. В современной научной литературе такие модели принято называть математическими моделями соболевского типа.

Как правило, процессы, протекающие в механике, технике и производстве, управляемы. Особую роль играет исследование внешнего воздействия на изучаемый процесс, при помощи которого мы можем добиться желаемого результата. Изучение задач оптимального управления носит несомненно практический характер.

В статье описываются разработанные автором методы, при помощи которых изучаются следующие математические модели: математическая модель Осколкова нелинейной фильтрации, обобщенная математическая фильтрационная модель Буссинеска, обобщенная математическая модель деформации конструкции из двутавровых балок. Рассмотрим каждую отдельно.

1. Математическая модель Осколкова нелинейной фильтрации. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим условие Дирихле

$$x(s,t) = 0, \ (s,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \tag{1}$$

для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации

$$(\lambda - \Delta)x_t - \alpha\Delta x + |x|^{p-2}x = u. \tag{2}$$

Условие Дирихле (1) и уравнение (2) образуют модель Осколкова нелинейной фильтрации. Уравнение (1) моделирует процесс фильтрации вязкоупругой несжимаемой жидкости (например, нефти). Искомая функция $x = x(s,t)$ соответствует давлению фильтрующейся жидкости; параметры $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}_+$ характеризуют вязкие и упругие свойства жидкости соответственно; свободный член $u = u(s,t)$ отвечает внешней нагрузке. Различные начально-краевые задачи для уравнения (2) в разных аспектах были исследованы А.П. Осколковым и его учениками [1] в случае положительности параметра λ. Однако экспериментально [2] было показано, что параметр λ может принимать отрицательные значения. В работе [3] показано, что фазовым пространством уравнения (2) при $\alpha \neq 0, p \geq 2$ служит простое гладкое банахово многообразие.

2. Обобщенная математическая фильтрационная модель Буссинеска. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим условие Дирихле (1) для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска

$$(\lambda - \Delta)x_t - \Delta(|x|^{p-2}x) = u. \tag{3}$$

Условие Дирихле (1) и уравнение (3) образуют обобщенную фильтрационную модель Буссинеска. Уравнение (3) является наиболее интересным частным случаем уравнения, полученного Е.С. Дзекцером [4]. Здесь искомая функция $x = x(s,t)$ отвечает потенциалу скорости движения свободной поверхности фильтрующейся жидкости; параметры $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\lambda \in \mathbb{R}$ характеризуют среду, причем параметр λ может принимать отрицательные значения; свободный член $u = u(s,t)$ соответствует внешней нагрузке, т.е. истокам и стокам жидкости. Исследование разрешимости неоднородной задачи было начато в [5].

3. Обобщенная математическая модель деформации конструкции из двутавровых балок. Пусть $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathcal{V};\mathcal{E})$ – конечный связный ориентированный граф, где $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i=1}^M$ – множество вершин, а $\mathcal{E} = \{E_j\}_{j=1}^N$ – множество дуг. Мы предполагаем, что каждая дуга имеет длину $l_j > 0$ и площадь поперечного сечения ребра $d_j > 0$. На графе $\mathbf{G}$ рассмотрим уравнения

$$j: \ -\lambda x_{jt} - x_{jtss} + \alpha_j^1 x_j + \alpha_j^2 x_j^3 + ... + \alpha_j^k x_j^{2k-1} = u_j, \tag{4}$$

для всех $s \in (0, l_j)$, $t \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,N}$. Для уравнений (4) в каждой вершине V_i, $i = \overline{1,M}$ зададим краевые условия

$$\sum_{j:E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j x_{js}(0,t) - \sum_{r:E_r \in E^\omega(V_i)} d_r x_{rs}(l_r,t) = 0, \tag{5}$$

$$x_r(0,t) = x_j(0,t) = x_h(l_h,t) = x_m(l_m,t), \tag{6}$$

для всех $E_r, E_j \in E^\alpha(V_i)$, $E_h, E_m \in E^\omega(V_i)$, которые являются аналогами законов Кирхгоффа. Здесь через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество дуг с началом (концом) в вершине V_i. Условие (5) означает, что поток через каждую вершину должен равняться нулю, а условие (6) – что решение в каждой вершине должно быть непрерывным. Краевые условия (5), (6) и уравнение (4) образуют математическую модель деформации конструкции из двутавровых балок. Уравнение (4) получено Н.Дж. Хоффом [6] в случае $n = 1$. Искомая функция

$x_j = x_j(s,t)$ показывает отклонение балки от вертикали под действием постоянной нагрузки $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Параметры $\alpha_j^i \in \mathbb{R}$ характеризуют свойства материала балки; свободный член $u_j = u_j(s,t)$ соответствует внешней (боковой, в случае $n = 1$) нагрузке на j-е ребро графа. В работе [7] показано, что фазовым пространством уравнений (4) в случае $k = 1$ при $\alpha_j^1 \cdot \alpha_j^2 > 0$ служит простое гладкое банахово многообразие. Впервые уравнения Хоффа на графах в случае $k = 1$ были изучены в [8].

Данные математические модели в подходящим образом подобранных функциональных банаховых пространствах $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{U}$ редуцируются к абстрактному полулинейному уравнению

$$L \dot{x} + Mx + \sum_{j=1}^{k} N_j(x) = u, \ \ker L \neq \{0\}. \tag{7}$$

К настоящему времени сложилась традиция, поддерживаемая работами как отечественных [9–16], так и зарубежных [17,18] математиков, называть уравнения вида (7) и их конкретные интерпретации (2) – (4) *уравнениями соболевского типа*. Сегодня уравнения соболевского типа составляют обширную область в неклассических уравнениях математической физики. Наше исследование примыкает к направлению, созданному и возглавляемому Г.А. Свиридюком. В основе данного направления лежит метод *фазового пространства,* основы которого были заложены в работах [19,20]. Основной упор в этих исследованиях делается на изучение *морфологии* фазового пространства уравнения (7), что позволяет найти условия существования решения задачи Коши

$$x(0) = x_0 \tag{8}$$

для уравнения (7). Основной трудностью изучения задачи Коши является принципиальная неразрешимость задачи (7), (8) при x_0, взятых пусть даже из плотного в $\mathfrak{X}$ линеала. Другой успешный подход к изучению вырожденных уравнений представлен в [21].

Нашей целью является получение условий разрешимости задачи Коши (8) для уравнения (7). Наряду с условием Коши будем рассматривать условие Шоуолтера – Сидорова

$$L(x(0) - x_0) = 0. \tag{9}$$

В [22] показано, что условие (9) для уравнения (7) является более естественным и позволяет избежать трудностей, связанных с изучением задачи Коши (7), (8). Условие Шоуолтера – Сидорова (9) является прямым обобщением условия Коши (8). Более общим начальным условием для линейных уравнений соболевского типа, чем условие (9), является начально-конечное условие [23].

Рассмотрим оптимальное управление

$$J(x,u) \to \min \tag{10}$$

решениями задач (7), (8) и (7), (9). Здесь $J(x,u)$ – некоторый специальным образом построенный функционал качества; управление $u \in \mathfrak{U}_{ad}$, где $\mathfrak{U}_{ad}$ – некоторое замкнутое и выпуклое множество в пространстве управлений $\mathfrak{U}$. Линейная задача оптимального управления для уравнения соболевского типа с начальным условием Коши впервые была поставлена и изучена Г.А. Свиридюком и А.А. Ефремовым [24]. Развитие результатов Г.А. Свиридюка и А.А. Ефремова на случай (L,p)-радиального оператора с начальным условием Шоуолтера – Сидорова было сделано В.Е. Федоровым и М.В. Плехановой [25]. Далее задача оптимального управления для линейного уравнения соболевского типа с начально-конечным условием была изучена в [26]. Приминение условия Шоуолтера – Сидорова (9) привело к упрощению численных исследований систем леонтьевского типа [27], а также задач оптимального управления для них [28]. В последнее время появивлись приложения задач оптимального управления для систем леонтьевского типа к проблемам динамических измерений [29, 30]. В [31] начато изучение задач оптимального управления для уравнений соболевского типа высокого порядка.

Для изучения вопроса существования решения задач (7), (8) и (7), (9) с самосопряженным, неотрицательно определенным, фредгольмовым оператором L и s-монотонным и p-коэрцитивным оператором M будем использовать метод монотонности. Построим приближенные решения посредством метода Галеркина – Петрова. Идейно наши результаты близки к [32–35]. Существование приближенных решений доказывается с помощью теоремы существования решения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для метода монотонности требуется построение априорных оценок. Наиболее простые априорные оценки проистекают из физических соображений и свойств операторов L и M. Доказательство единственности решения существенным образом опирается на свойство s-монотонности оператора M. Далее мы исследуем вопрос существования оптимального управления задачи (10) решениями задач (7), (8) и (7), (9).

1. Разрешимость задачи Коши и задачи Шоуолтера – Сидорова

Динамический случай

Пусть $\mathcal{H} = (\mathcal{H}; \langle\cdot,\cdot\rangle)$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным; $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}^*)$ и $(\mathfrak{B}_j, \mathfrak{B}_j^*), j = \overline{1,k}, k \in \mathbb{N}$ – дуальные (относительно двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$) пары рефлексивных банаховых пространств, причем вложения

$$\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{B}_k \hookrightarrow ... \hookrightarrow \mathfrak{B}_1 \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathfrak{B}_1^* \hookrightarrow ... \hookrightarrow \mathfrak{B}_k^* \hookrightarrow \mathfrak{H}^* \tag{11}$$

плотны и непрерывны. Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$ – линейный, непрерывный, самосопряженный, неотрицательно определенный, фредгольмов оператор, чей ортонормальный (в смысле $\mathcal{H}$) набор собственных векторов $\{\varphi_k\}$ образует базис в пространстве $\mathfrak{H}$, а $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}; \mathfrak{H}^*)$ – линейный, непрерывный, симметричный, 2-коэрцитивный оператор. Пусть $N_j \in C^r(\mathfrak{B}_j; \mathfrak{B}_j^*), r \geq 1, j = \overline{1,k}$ – s-монотонные и p_j-коэрцитивные операторы, где $p_j \geq 2$ и $p_k = \max\limits_j p_j$ имеют симметричную производную Фреше.

Рассмотрим задачу Коши (8) для полулинейного уравнения соболевского типа (7). Ввиду самосопряженности и фредгольмовости оператора L отождествим $\mathfrak{H} \supset \ker L \equiv \operatorname{coker} L \subset \mathfrak{H}^*$. Поскольку $\operatorname{coker} L$ конечномерно, то $\mathfrak{H}^* = \operatorname{coker} L \oplus \operatorname{im} L$, $\mathfrak{B}_k^* = \operatorname{coker} L \oplus [\operatorname{im} L \cap \mathfrak{B}_k^*]$. Значит, существует проектор Q вдоль $\operatorname{coker} L$ на $\operatorname{im} L \cap \mathfrak{B}_k^*$.

Сделаем допущение, что

$$(\mathbb{I} - Q)u \text{ не зависит от } t \in (0, T), \tag{12}$$

и построим множество

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} \{x \in \mathfrak{H} : (\mathbb{I} - Q)Mx + (\mathbb{I} - Q)\sum\limits_{j=1}^{k} N_j(x) = (\mathbb{I} - Q)u\}, \text{если } \ker L \neq \{0\}; \\ \mathfrak{H}, \quad \text{если} \quad \ker L = \{0\}. \end{cases} \tag{13}$$

Введем в рассмотрение множество $\operatorname{coim} L = \{x \in \mathfrak{H} : \langle x, \varphi\rangle = 0 \, \forall \varphi \in \ker L \setminus \{0\}\}$. Построим пространство $\mathfrak{X} = \{x | \ x \in L_\infty(0, T; \operatorname{coim} L) \cap L_{p_k}(0, T; \mathfrak{M}), \quad \dot{x} \in L_2(0, T; \mathfrak{H})\}$.

Определение 1. *Слабым обобщенным решением* уравнения (7) назовем вектор-функцию $x \in \mathfrak{X}$, удовлетворяющую условию

$$\int_0^T \varphi(t)\left[\left\langle L\frac{d}{dt}x, w\right\rangle + \langle Mx, w\rangle + \sum_{j=1}^{k}\langle N_j(x), w\rangle\right]dt = \int_0^T \varphi(t)\,\langle u, w\rangle\,dt \tag{14}$$
$$\forall w \in \mathfrak{H}, \forall \varphi \in L_2(0,T).$$

Решение уравнения (7) назовем *решением задачи Коши,* если оно удовлетворяет (8).

Система $\{\varphi_k\}$ собственных векторов оператора L тотальна в пространстве $\mathfrak{H}$, а значит, в силу вложений (11) тотальна в пространствах $\mathfrak{B}_k$ и $\mathcal{H}$. Построим галеркинские приближения решения задачи (7), (8). Для этого выберем в $\mathfrak{H}$ ортонормальную (в смысле $\mathcal{H}$) тотальную систему $\{\varphi_i\}$ так, чтобы $\mathrm{span}\{\varphi_1,\ \varphi_2, ...,\ \varphi_l\} = \ker L, \dim\ker L = l$. Построим галеркинские приближения решения задачи (7), (8) в виде

$$x^m(t) = \sum_{i=1}^{m} a_i(t)\varphi_i,\ m > l, \tag{15}$$

где коэффициенты $a_i = a_i(t),\ i = 1, ..., m$ определяются следующей задачей

$$\left\langle L\frac{dx^m}{dt}, \varphi_i\right\rangle + \left\langle Mx^m + \sum_{j=1}^{k} N_j(x^m), \varphi_i\right\rangle = \langle u, \varphi_i\rangle\,, \tag{16}$$

$$\langle x^m(0) - x_0, \varphi_i\rangle = 0, \tag{17}$$

$$x^m(0) \to x_0 \text{ сильно в пространстве } \mathfrak{H}. \tag{18}$$

Уравнения (16) представляют собой вырожденную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть $T_m \in \mathbb{R}_+$, $T_m = T_m(x_0)$, $\mathfrak{B}_k^m = \mathrm{span}\{\varphi_1,\ \varphi_2, ...,\ \varphi_m\}$.

Лемма 1. [36] *При любых $x_0 \in \mathfrak{M}$ и $m > \dim\ker L$ существует единственное локальное решение $x^m \in C^r(0, T_m; \mathfrak{M})$ задачи (16), (17).*

Теорема 1. [36] *При любых $x_0 \in \mathfrak{M}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $u \in L_2(0, T; \mathfrak{H}^*)$ таких, что выполнено (12), существует единственное решение $x \in \mathfrak{X}$ задачи (7), (8).*

Перейдем к рассмотрению вопроса сущестования решения задачи Шоуолтера – Сидорова (9) для уравнения (7). Обозначим через P проектор пространства $\mathfrak{H}$ вдоль $\ker L$ на $\mathrm{coim} L$. Обозначим через $x^1 = Px$. Построим пространство

$$\mathfrak{X}_1 = \{x|\ x \in L_\infty(0, T; \mathrm{coim}\, L) \cap L_{p_k}(0, T; \mathfrak{B}_k),\quad \dot{x}^1 \in L_2(0, T; \mathrm{coim}\, L)\}.$$

Определение 2. *Слабым обобщенным решением* уравнения (7) назовем вектор-функцию $x \in \mathfrak{X}_1$, удовлетворяющую условию (14). Решение уравнения (7) назовем *решением задачи Шоуолтера – Сидорова,* если оно удовлетворяет (9).

Построим галеркинские приближения решения задачи (7), (9). Аналогично задачи Коши выберем в $\mathfrak{H}$ ортонормальную (в смысле $\mathcal{H}$) тотальную систему $\{\varphi_i\}$ так, чтобы $\mathrm{span}\{\varphi_1,$ $\varphi_2, ...,\ \varphi_l\} = \ker L, \dim\ker L = l$. Построим галеркинские приближения решения задачи (7), (9) в виде (15), где коэффициенты $a_i = a_i(t),\ i = 1, ..., m$ определяются следующей задачей

$$\langle Lx_t^m, \varphi_i\rangle + \langle Mx^m, \varphi_i\rangle + \left\langle \sum_{j=1}^{k} N_j(x^m), \varphi_i\right\rangle = \langle u, \varphi_i\rangle\,, \tag{19}$$

$$\langle L(x^m(0)-x_0),\varphi_i\rangle = 0,\ i=1,...,m. \tag{20}$$

$$Lx^m(0)\to Lx_0 \text{ сильно в подпространстве } \mathrm{coim}L. \tag{21}$$

Уравнения (19) представляют собой вырожденную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть $T_m\in\mathbb{R}_+$, $T_m=T_m(x_0)$, $\mathfrak{B}_k^m=\mathrm{span}\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_m\}$.

Лемма 2. [37] *При любых* $x_0\in\mathfrak{H}$ *и* $m>\dim\ker L$ *существует единственное локальное решение* $x^m\in C^r(0,T_m;\mathfrak{B}_k^m)$ *задачи (19), (20).*

Теорема 2. [37] *При любых* $x_0\in\mathfrak{H}$, $T\in\mathbb{R}_+$, $u\in L_2(0,T;\mathfrak{H}^*)$ *существует единственное решение* $x\in\mathfrak{X}_1$ *задачи (7), (9).*

Рассмотрим уравнение

$$L\,\dot{x}+\sum_{j=1}^{k}N_j(x)=u. \tag{22}$$

Аналогично предыдущим рассуждениям исследуем вопрос существования единственного слабого обобщенного решения задач (8), (22) и (9), (22).

Определение 3. *Слабым обобщенным решением* уравнения (22) назовем вектор-функцию $x\in\mathfrak{X}$, удовлетворяющую условию

$$\begin{gathered}\int_0^T\varphi(t)\left[\left\langle L\frac{d}{dt}x,w\right\rangle+\sum_{j=1}^{k}\langle N_j(x),w\rangle\right]dt=\int_0^T\varphi(t)\,\langle u,w\rangle\,dt\\ \forall w\in\mathfrak{H},\forall\varphi\in L_2(0,T).\end{gathered} \tag{23}$$

Решение уравнения (22) назовем *решением задачи Коши,* если оно удовлетворяет (8). Решение уравнения (22) назовем *решением задачи Шоуолтера – Сидорова,* если оно удовлетворяет (9).

Построим галеркинские приближения решения задач (8), (22) в виде (15), где коэффициенты $a_i=a_i(t)$, $i=1,...,m$ определяются следующей системой алгебро-дифференциальных уравнений

$$\left\langle L\frac{dx^m}{dt},\varphi_i\right\rangle+\left\langle\sum_{j=1}^{k}N_j(x^m),\varphi_i\right\rangle=\langle u,\varphi_i\rangle \tag{24}$$

и удовлетворяют (17), (18) или, соответственно, (20), (21).

Теорема 3. [36] *При любых* $x_0\in\mathfrak{M}$, $T\in\mathbb{R}_+$, $u\in L_{q_k}(0,T;\mathfrak{B}_k^*)$ *таких, что выполнено (12), существует единственное решение* $x\in\mathfrak{X}$ *задачи (8), (22).*

Теорема 4. [37] *При любых* $x_0\in\mathfrak{H}$, $T\in\mathbb{R}_+$, $u\in L_{q_k}(0,T;\mathfrak{B}_k^*)$ *существует единственное решение* $x\in\mathfrak{X}_1$ *задачи (9), (22).*

Эволюционный случай

Пусть $\mathcal{H}=(\mathcal{H};\langle\cdot,\cdot\rangle)$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным; $(\mathfrak{H},\mathfrak{H}^*)$ и $(\mathfrak{B},\mathfrak{B}^*)$ – дуальные (относительно двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$) пары рефлексивных банаховых пространств, причем вложения

$$\mathfrak{B}_k\hookrightarrow...\hookrightarrow\mathfrak{B}_1\hookrightarrow\mathfrak{H}\hookrightarrow\mathcal{H}\hookrightarrow\mathfrak{H}^*\hookrightarrow\mathfrak{B}_1^*\hookrightarrow...\hookrightarrow\mathfrak{B}_k^* \tag{25}$$

плотны и непрерывны.

Рассмотрим задачу Коши (8) для полулинейного уравнения соболевского типа (22). Пусть операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{H};\mathfrak{H}^*)$ и $N_j \in C^r(\mathfrak{B}_j;\mathfrak{B}_j^*)$, $j=\overline{1,k}$ обладают всеми свойствами, введенными в начале параграфа.

Ввиду самосопряженности и фредгольмовости оператора L отождествим $\mathfrak{H} \supset \ker L \equiv \operatorname{coker} L \subset \mathfrak{H}^*$. Очевидно, $\mathfrak{H}^* = \operatorname{coker} L \oplus \operatorname{im} L$. Обозначим через $\overline{\operatorname{im} L}$ замыкание $\operatorname{im} L$ в топологии $\mathfrak{B}_k^*$, тогда $\mathfrak{B}_k^* = \operatorname{coker} L \oplus \overline{\operatorname{im} L}$. Обозначим через Q проектор $\mathfrak{B}_k^*$ вдоль $\operatorname{coker} L$ на $\overline{\operatorname{im} L}$ и аналогично динамическому случаю сделаем допущение, что

$$(\mathbb{I}-Q)u \text{ не зависит от } t \in (0,T). \tag{26}$$

Аналогично динамическому случаю введем в рассмотрение множества

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} \{x \in \mathfrak{B}_k : (\mathbb{I}-Q)Mx + (\mathbb{I}-Q)\sum\limits_{j=1}^{k} N_j(x) = (\mathbb{I}-Q)u\}, \text{если } \ker L \neq \{0\}; \\ \mathfrak{B}_k, \quad \text{если} \quad \ker L = \{0\}, \end{cases} \tag{27}$$

$$\operatorname{coim} L = \{u \in \mathfrak{H} : \langle u,v\rangle = 0,\ \forall v \in \ker L\backslash\{0\}\}.$$

Обозначим через P проектор вдоль $\ker L$ на $\operatorname{coim} L \cap \mathfrak{B}_k \equiv \tilde{\mathfrak{B}}_k$.

Теорема 5. [36] *При любых $x_0 \in \mathfrak{M}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $u \in L_{q_k}(0,T;\mathfrak{B}_k^*)$ таких, что выполнено (26), существует единственное решение $x \in \mathfrak{X}$ задачи (8), (22).*

Теорема 6. [37] *При любых $x_0 \in \mathfrak{B}_k$, $T \in \mathbb{R}_+$, $u \in L_{q_k}(0,T;\mathfrak{B}_k^*)$ существует единственное решение $x \in \mathfrak{X}_1$ задачи (9), (22).*

2. Оптимальное управление

Пусть $\mathcal{H} = (\mathcal{H};\langle\cdot,\cdot\rangle)$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным; $(\mathfrak{H},\mathfrak{H}^*)$ и $(\mathfrak{B}_j,\mathfrak{B}_j^*)$, $j=\overline{1,k}, k \in \mathbb{N}$ – дуальные (относительно двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$) пары рефлексивных банаховых пространств, причем вложения

$$\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{B}_k \hookrightarrow ... \hookrightarrow \mathfrak{B}_1 \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathfrak{B}_1^* \hookrightarrow ... \hookrightarrow \mathfrak{B}_k^* \hookrightarrow \mathfrak{H}^* \tag{28}$$

плотны и непрерывны, а вложение

$$\mathfrak{H} \Subset \mathcal{H} \tag{29}$$

компактно. Пусть операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{H};\mathfrak{H}^*)$, $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{H};\mathfrak{H}^*)$ и $N_j \in C^r(\mathfrak{B}_j;\mathfrak{B}_j^*), r \geq 1, j=\overline{1,k}$ обладают свойствами п. 1.

Построим пространство $\mathfrak{U}_1 = L_2(0,T;\mathfrak{H}^*)$ и определим в пространстве $\mathfrak{U}_1$ непустое замкнутое и выпуклое множество $\mathfrak{U}_{ad}^1$. Рассмотрим задачу оптимального управления

$$L\,\dot{x} + Mx + \sum_{j=1}^{k} N_j(x) = u,\ L(x(0)-x_0)=0, \tag{30}$$

$$J(x,u) \to \inf,\ u \in \mathfrak{U}_{ad}^1, \tag{31}$$

где функционал штрафа задается формулой

$$J(x,u) = \alpha \int\limits_0^T \|x(t)-z_d(t)\|_{\mathfrak{B}_k}^{p_k}\,dt + \beta \int\limits_0^T \|u(t)\|_{\mathfrak{H}}^2\,dt,\ \alpha+\beta=1, \tag{32}$$

где $z_d = z_d(t)$ – желаемое состояние.

Определение 4. Пару $(\tilde{x}, \tilde{u}) \in \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{U}^1_{ad}$ назовем *решением задачи оптимального управления* (30), (31), если

$$J(\tilde{x}, \tilde{u}) = \inf_{(x,u)} J(x, u),$$

где пары $(x, u) \in \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{U}^1_{ad}$ удовлетворяют (30) в смысле опеределения 2; вектор-функцию $\tilde{u}$ назовем *оптимальным управлением* в задаче (30), (31).

Замечание 1. *Допустимым элементом* задачи (30), (31) назовем пару $(x, u) \in \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{U}^1_{ad}$, удовлетворяющую задаче (30), для которой

$$J(x, u) < +\infty.$$

Поскольку множество $\mathfrak{U}^1_{ad} \neq \emptyset$, то для любого $u \in \mathfrak{U}^1_{ad} \subset \mathfrak{U}_1$ в силу теоремы 2 существует единственное решение $x = x(u)$ задачи (30).

Теорема 7. [37] *При любых $x_0 \in \mathfrak{H}$, $T \in \mathbb{R}_+$ существует решение задачи (30), (31).*

Перейдем к рассмотрению задачи оптимального управления решениями задачи Коши для полулинейного уравнения соболевского типа. Построим пространство $\mathfrak{U} = \{u \in L_2(0, T; \mathfrak{H}^*) : (\mathbb{I} - Q)u = 0,\ t \in (0, T)\}$ и определим в пространстве $\mathfrak{U}$ непустое замкнутое и выпуклое множество $\mathfrak{U}_{ad}$. Рассмотрим задачу оптимального управления

$$L\,\dot{x} + Mx + \sum_{j=1}^{k} N_j(x) = u,\ x(0) = x_0, \tag{33}$$

$$J(x, u) \to \inf,\ u \in \mathfrak{U}^1_{ad}, \tag{34}$$

где функционал штрафа задается формулой (32).

Определение 5. Пару $(\tilde{x}, \tilde{u}) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_{ad}$ назовем *решением задачи оптимального управления* (33), (34), если

$$J(\tilde{x}, \tilde{u}) = \inf_{(x,u)} J(x, u),$$

где пары $(x, u) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_{ad}$ удовлетворяют (34) в смысле опеределения 1; вектор-функцию $\tilde{u}$ назовем *оптимальным управлением* в задаче (33), (34).

Теорема 8. [36] *При любых $x_0 \in \mathfrak{M}$, $T \in \mathbb{R}_+$ существует решение задачи (33), (34).*

Построим пространство $\mathfrak{U}_2 = L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}^*_k)$ и определим в пространстве $\mathfrak{U}_2$ непустое замкнутое и выпуклое множество $\mathfrak{U}^2_{ad}$. Рассмотрим задачу оптимального управления

$$L\,\dot{x} + \sum_{j=1}^{k} N_j(x) = u,\ L(x(0) - x_0) = 0, \tag{35}$$

$$J(x, u) = \alpha \int_0^T \|x(t) - z_d(t)\|^{p_k}_{\mathfrak{B}_k}\, dt + \beta \int_0^T \|u(t)\|^{q_k}_{\mathfrak{B}_k}\, dt \to \inf,\ u \in \mathfrak{U}^2_{ad}. \tag{36}$$

Построим пространство $\mathfrak{U}_3 = \{u \in L_{q_k}(0, T; \mathfrak{B}^*_k : (\mathbb{I} - Q)u = 0,\ t \in (0, T)\}$ и определим в пространстве $\mathfrak{U}_3$ непустое замкнутое и выпуклое множество $\mathfrak{U}^3_{ad}$. Рассмотрим задачу оптимального управления

$$L\,\dot{x} + \sum_{j=1}^{k} N_j(x) = u,\ x(0) = x_0, \tag{37}$$

$$J(x,u) = \alpha \int\limits_0^T \|x(t) - z_d(t)\|_{\mathfrak{B}_k}^{p_k} \, dt + \beta \int\limits_0^T \|u(t)\|_{\mathfrak{B}_k}^{q_k} \, dt \to \inf, \; u \in \mathfrak{U}_{ad}^3, \tag{38}$$

где $\alpha + \beta = 1$, $z_d = z_d(t)$ – желаемое состояние. Аналогично предыдущим построениям справедливы следующие теоремы.

Теорема 9. [37] *При любых $x_0 \in \mathfrak{H}$, $T \in \mathbb{R}_+$ существует решение задачи (35), (36).*

Теорема 10. [36] *При любых $x_0 \in \mathfrak{M}$, $T \in \mathbb{R}_+$ существует решение задачи (37), (38).*

3. Математическая модель Осколкова нелинейной фильтрации

В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим условие Дирихле (1) для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации (2). Рассмотрим условие Шоуолтера – Сидорова

$$(\lambda - \Delta)(x(s,0) - x_0(s)) = 0, \; s \in \Omega \tag{39}$$

или условие Коши

$$x(s,0) = x_0(s), \; s \in \Omega \tag{40}$$

для модели (1), (2).

Обозначим через $\mathfrak{H} = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\mathfrak{B} = L_p(\Omega)$, $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$. Обозначим через $\{\varphi_k\}$ последовательность собственных функций однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа $(-\Delta)$ в области Ω, а через $\{\lambda_k\}$ – соответствующую последовательность собственных значений, занумерованную по неубыванию с учетом кратности. Построим множества

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} \mathfrak{H}, \text{ если } \lambda > -\lambda_1; \\ \{x \in \mathfrak{H} : \int\limits_\Omega (-\alpha\Delta x + |x|^{p-2}x)\varphi_1 \, ds = \int\limits_\Omega u\varphi_1 \, ds\}, \text{ если } \lambda = -\lambda_1, \end{cases}$$

$$\operatorname{coim} L = \begin{cases} \mathfrak{H}, \text{ если } \lambda > -\lambda_1; \\ \{x \in \mathfrak{H} : \langle x, \varphi_1 \rangle = 0\}, \text{ если } \lambda = -\lambda_1, \end{cases}$$

и проектор

$$Q = \begin{cases} \mathbb{I}, \text{ если } \lambda > -\lambda_1; \\ \mathbb{I} - \langle \cdot, \varphi_1 \rangle, \text{ если } \lambda = -\lambda_1. \end{cases}$$

Построим пространство

$$\mathfrak{X} = \{x | \; x \in L_\infty(0,T; \operatorname{coim} L) \cap L_{p_k}(0,T; \mathfrak{M}), \quad \dot{x} \in L_2(0,T; \mathfrak{H})\}.$$

Определение 6. *Слабым обобщенным решением* уравнения (2) назовем вектор-функцию $x \in \mathfrak{X}$, удовлетворяющую условию

$$\begin{gathered} \int\limits_0^T \varphi(t) \left[\int\limits_\Omega ((\lambda - \Delta)x_t w - \alpha\Delta x w + |x|^{p-2}xw) ds \right] dt = \\ = \int\limits_0^T \left[\varphi(t) \int\limits_\Omega uw ds \right] dt, \forall w \in L_2(\Omega), \forall \varphi \in L_2(0,T). \end{gathered} \tag{41}$$

Решение уравнения (2) назовем *решением задачи Коши,* если оно удовлетворяет (40).

Построим пространство

$$\mathfrak{X}_1 = \{x | \; x \in L_\infty(0,T; \operatorname{coim} L) \cap L_p(0,T; \mathfrak{B}), \quad \dot{x}^1 \in L_2(0,T; \operatorname{coim} L)\}.$$

Определение 7. *Слабым обобщенным решением* уравнения (2) назовем вектор-функцию $x \in \mathfrak{X}_1$, удовлетворяющую условию (41). Решение уравнения (2) назовем *решением задачи Шоуолтера – Сидорова,* если оно удовлетворяет (39).

Система $\{\varphi_k\}$ собственных векторов оператора L в силу вложений (25) образует базис в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Выберем в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ ортонормальную систему $\{\varphi_i\}$ так, чтобы $\operatorname{span}\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_l\} = \ker L, \dim\ker L = l$. Построим галеркинские приближения решений задачи (1), (2), (39) и задачи (1), (2), (40) в виде (15), где коэффициенты $a_i = a_i(t)$, $i = 1, ..., m$ определяются системой уравнений

$$\int\limits_{\Omega}((\lambda - \Delta)x_t\varphi_i - \alpha\Delta x\varphi_i + |x|^{p-2}x\varphi_i)ds = \int\limits_{\Omega} u\varphi_i ds, \tag{42}$$

в случае условия Шоуолтера – Сидорова (39) – условием

$$\int\limits_{\Omega} (\lambda - \Delta)\left(x_m(s,0) - x_0(s)\right)\varphi_i(s)ds = 0, \tag{43}$$

а в случае условия Коши (40) – условием

$$\int\limits_{\Omega} \left(x_m(s,0) - x_0(s)\right)\varphi_i(s)ds = 0. \tag{44}$$

Уравнения (42) представляют собой вырожденную систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теорема 11. [38] *Пусть* $\lambda \geq -\lambda_1$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *и* $n > 2$, $2 \leq p \leq 2 + \frac{4}{n-2}$ *или* $n = 2$, $p \in (1, +\infty)$, *тогда при любых* $x_0 \in \mathfrak{M}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $u \in L_2(0, T; \mathfrak{H}^*)$ *таких, что выполнено (12), существует единственное решение* $x \in \mathfrak{X}$ *задачи (1), (2), (40).*

Теорема 12. [38] *Пусть* $\lambda \geq -\lambda_1$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *и* $n > 2$, $2 \leq p \leq 2 + \frac{4}{n-2}$ *или* $n = 2$, $p \in (1, +\infty)$, *тогда при любых* $x_0 \in \mathfrak{H}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $u \in L_2(0, T; \mathfrak{H}^*)$ *существует единственное решение* $x \in \mathfrak{X}_1$ *задачи (1), (2), (39).*

В цилиндре $Q_T = \Omega \times (0, T)$ зададим функционал качества

$$J(x, u) = \frac{1}{2}\int\limits_0^T \|x - z_d\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}dt + \frac{N}{2}\int\limits_0^T \|u\|^2_{W_2^{-1}(\Omega)}dt \to \inf \tag{45}$$

и перейдем к рассмотрению задачи оптимального управления для модели Осколкова нелинейной фильтрации (1), (2) с условием Коши (40). Выберем $\mathfrak{U}^1_{ad} \subset L_2(0, T; W_2^{-1}(\Omega))$ – непустое, замкнутое, выпуклое множество, для которого выполнено $(\mathbb{I} - Q)u = 0$.

Теорема 13. [38] *Пусть* $\lambda \geq -\lambda_1$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $n > 2$ *и* $2 \leq p < 2 + \frac{4}{n-2}$ *или* $n = 2$, $p \in (1, +\infty)$, *тогда при любых* $x_0 \in \mathfrak{M}$, $T \in \mathbb{R}_+$ *существует оптимальное управление решениями задачи (1), (2), (40), (45).*

Перейдем к рассмотрению задачи оптимального управления для модели Осколкова нелинейной фильтрации (1), (2) с условием Шоуолтера – Сидорова (39). Введем пространство управлений $\mathfrak{U} = L_2(0, T; W_2^{-1}(\Omega))$ и выберем непустое, замкнутое, выпуклое множество $\mathfrak{U}_{ad}$, тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 14. [38] *Пусть* $\lambda \geq -\lambda_1$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $n > 2$ *и* $2 \leq p < 2 + \frac{4}{n-2}$ *или* $n = 2$, $p \in (1, +\infty)$, *тогда при любых* $x_0 \in \mathfrak{H}$, $T \in \mathbb{R}_+$ *существует оптимальное управление решениями задачи (1), (2), (39), (45).*

Приведем теперь необходимые условия, которым удовлетворяет любое оптимальное управление u решениями задачи (1), (2), (39).

Теорема 15. [37] *Пусть* $\lambda \geq -\lambda_1, \alpha \in \mathbb{R}_+$ *и* $n > 2$, $2 \leq p < 2+\frac{4}{n-2}$ *или* $n = 2$, $p \in (1, +\infty)$, *если* u *– оптимальное управление задачи (1), (2), (39), (45), то существует вектор-функция* $y \in L_\infty(0, T; \mathrm{coim}\, L) \cap L_2(0, T; \mathfrak{H})$ *такая, что*

$$(\lambda - \Delta)x_t - \alpha\Delta x + |x|^{p-2}x = u,$$

$$(-\lambda + \Delta)y_t - \alpha\Delta y + (p-1)|x|^{p-2}y = (-\Delta)(x(u) - z_d), (s,t) \in Q_T,$$

$$x(s,t) = y(s,t) = 0,\ (s,t) \in \partial\Omega \times (0,T),$$

$$(\lambda - \Delta)(x(s,0) - x_0(s)) = 0,\ (-\lambda + \Delta)y(s,T) = 0,\ s \in \Omega,$$

$$\int\limits_{Q_T} (y + N(-\Delta)^{-1}(u))(v-u)dsdt \geq 0,\ \forall v \in U_{ad}.$$

4. Обобщенная математическая фильтрационная модель Буссинеска

В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим математическую фильтрационную модель Буссинеска (1), (3). Для модели (1), (3) рассмотрим начальное условие Шоуолтера – Сидорова

$$(\lambda - \Delta)(x(s,0) - x_0(s)) = 0,\ s \in \Omega \tag{46}$$

или условие Коши

$$x(s,0) = x_0(s),\ s \in \Omega. \tag{47}$$

Положим $\mathcal{H} = W_2^{-1}(\Omega)$, $\mathfrak{H} = L_2(\Omega)$, $\mathfrak{B} = L_p(\Omega)$. Определим в $\mathcal{H}$ скалярное произведение формулой

$$\langle x, y\rangle = \int\limits_\Omega x\tilde{y}ds\ \forall x, y \in \mathcal{H}, \tag{48}$$

где $\tilde{y}$ – обобщенное решение однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа $(-\Delta)$ в области Ω. Положим $\mathfrak{B}^* = (L_p(\Omega))^*$ и $\mathfrak{H}^* = (L_2(\Omega))^*$, где $(L_p(\Omega))^*$ – сопряженное относительно двойственности (48) пространство. Построим множества

$$\mathrm{coim}\, L = \begin{cases} \mathfrak{H}, \text{ если } \lambda > -\lambda_1; \\ \{x \in \mathfrak{H} : \langle x, \varphi_1\rangle = 0\}, \text{ если } \lambda = -\lambda_1, \end{cases}$$

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} \mathfrak{B}, \text{ если } \lambda > -\lambda_1; \\ \{x \in \mathfrak{B} : \int\limits_\Omega |x|^{p-2}x\varphi_1\, ds = \int\limits_\Omega u\tilde{\varphi}_1\, ds\}\}, \text{ если } \lambda = -\lambda_1, \end{cases}$$

и проектор

$$Q = \begin{cases} \mathbb{I},\ \lambda > -\lambda_1; \\ \mathbb{I} - \langle\cdot, \varphi_1\rangle,\ \lambda = -\lambda_1. \end{cases}$$

Построим пространство

$$\mathfrak{X} = \{x|\ x \in L_\infty(0, T; \mathrm{coim}\, L) \cap L_p(0, T; \mathfrak{M}),\ \frac{dx}{dt} \in L_2(0, T; \mathrm{coim}\, L)\}.$$

Определение 8. *Слабым обобщенным решением* уравнения (3) назовем функцию $x \in \mathfrak{X}$, удовлетворяющую условию

$$\begin{gathered}\int\limits_0^T \varphi(t)\left[\int\limits_\Omega(\lambda x_t\tilde{w} + x_t w + \alpha|x|^{p-2}xw)ds\right]dt = \\ = \int\limits_0^T\left[\varphi(t)\int\limits_\Omega u\tilde{w}ds\right]dt, \forall w \in L_2(\Omega), \forall\varphi \in L_2(0,T).\end{gathered} \tag{49}$$

Решение уравнения (3) назовем *решением задачи Коши,* если оно удовлетворяет (47).

Построим пространство

$$\mathfrak{X}_1 = \{x|\ x \in L_\infty(0,T;\operatorname{coim} L) \cap L_p(0,T;L_p(\Omega)),\ \frac{dx}{dt} \in L_2(0,T;\operatorname{coim} L).$$

Определение 9. *Слабым обобщенным решением* уравнения (3) назовем функцию $x \in \mathfrak{X}_1$, удовлетворяющую условию (49). Решение уравнения (3) назовем *решением задачи Шоуолтера – Сидорова,* если оно удовлетворяет (46).

Система $\{\varphi_k\}$ собственных векторов оператора L в силу вложений (25) образует базис в пространстве $W_2^{-1}(\Omega)$. Выберем в $W_2^{-1}(\Omega)$ ортонормальную систему $\{\varphi_i\}$ так, чтобы $\operatorname{span}\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_l\} = \ker L, \dim\ker L = l$. Построим галеркинские приближения решения задачи (1), (3), (46) и задачи (1), (3), (47) в виде (15), где коэффициенты $a_i = a_i(t)$, $i = 1, ..., m$ определяются системой уравнений

$$\int\limits_\Omega(\lambda x_t\tilde{\varphi}_i + x_t\varphi_i + \alpha|x|^{p-2}x\tilde{\varphi}_i)ds = \int\limits_\Omega u\tilde{\varphi}_i ds, \tag{50}$$

в случае условия Шоуолтера – Сидорова (46) – условием

$$\int\limits_\Omega\left[(\lambda\left(x_m(0) - x_0\right)\tilde{\varphi}_i + \left(x_m(s,0) - x_0(s)\right)\varphi_i(s)\right]ds = 0, \tag{51}$$

а в случае условия Коши (47) – условием

$$\int\limits_\Omega\left(x_m(s,0) - x_0(s)\right)\tilde{\varphi}_i(s)ds = 0. \tag{52}$$

Уравнения (50) представляют собой вырожденную систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теорема 16. [39] *Пусть $p \geq \frac{2n}{n+2}$, $\lambda \geq -\lambda_1$, тогда при любых $x_0 \in \mathfrak{B}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $u \in L_q(0,T;\mathfrak{B}^*)$ существует единственное решение $x \in \mathfrak{X}_1$ задачи (1), (3), (46).*

Теорема 17. [39] *Пусть $p \geq \frac{2n}{n+2}$, $\lambda \geq -\lambda_1$, тогда при любых $x_0 \in \mathfrak{M}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $u \in L_q(0,T;\mathfrak{B}^*)$ таких, что выполнено (26), существует единственное решение $x \in \mathfrak{X}$ задачи (1), (3), (47).*

Перейдем к рассмотрению задачи оптимального управления для обобщенной фильтрационной модели Буссинеска (1), (3) с условием Коши (47). В цилиндре $Q_T = \Omega \times (0,T)$ рассмотрим задачу оптимального управления

$$J(x,u) = \frac{1}{p}\|x - z_d\|^p_{L_p(Q)} + \frac{N}{q}\int\limits_0^T\|u\|^q_{(L_p(\Omega))^*}dt,\ J(x,u) \to \inf. \tag{53}$$

Наконец, выберем $\mathfrak{U}_{ad} \subset L_q(0,T;(L_p(\Omega))^*)$ – замкнутое, выпуклое множество, для которого выполнено $(\mathbb{I} - Q)u(t) = 0$.

Теорема 18. [39] *Пусть* $p \geq \frac{2n}{n+2}$, $\lambda \geq -\lambda_1$, *тогда при любых* $x_0 \in \mathfrak{M}$ *существует оптимальное управление в задаче (1), (3), (47), (53).*

Перейдем к рассмотрению задачи оптимального управления для обобщенной фильтрационной модели Буссинеска (1), (3) с условием Шоуолтера – Сидорова (46). Выберем $\mathfrak{U}_{ad} \subset L_q(0,T;(L_p(\Omega))^*)$ – непустое, замкнутое, выпуклое множество.

Теорема 19. [39] *Пусть* $p \geq \frac{2n}{n+2}$, $\lambda \geq -\lambda_1$, *тогда при любых* $x_0 \in \mathfrak{B}$ *существует оптимальное управление в задаче (1), (3), (46), (53).*

Приведем теперь необходимые условия, которым удовлетворяет любое оптимальное управление u решениями обобщенной фильтрационной модели Буссинеска.

Теорема 20. [37] *Пусть* $p \geq \frac{2n}{n+2}$, $\lambda \geq -\lambda_1$, *если* u *– оптимальное управление задачи (53), то существует вектор* $y \in L_\infty(0,T;\operatorname{coim} L) \cap L_p(0,T;\mathfrak{B})$ *такой, что*

$$(\lambda - \Delta)x_t - \Delta(|x|^{p-2}x) = u,$$

$$(-\lambda + \Delta)y_t - \Delta((p-1)|x|^{p-2}y) = (-\Delta)(|x - z_d|^{p-1}\operatorname{sign}(x - z_d)), (s,t) \in Q,$$

$$x(s,t) = y(s,t) = 0,\ (s,t) \in \partial\Omega \times (0,T),$$

$$(\lambda - \Delta)(x(s,0) - x_0(s)) = 0,\ (\lambda - \Delta)y(s,T) = 0,\ s \in \Omega,$$

$$\int\limits_{Q_T}(v-u)\tilde{y}dsdt + \int\limits_0^T N\|u\|_{\mathfrak{B}^*}^{q-1}(\|u\|_{\mathfrak{B}^*})'_u)(v-u)dt \geq 0,\ \forall v \in \mathfrak{U}_{ad}.$$

5. Обобщенная математическая модель деформации конструкции из двутавровых балок

Пусть $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathcal{V};\mathcal{E})$ – конечный связный ориентированный граф, где $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i=1}^M$ – множество вершин, а $\mathcal{E} = \{E_j\}_{j=1}^N$ – множество дуг. На графе $\mathbf{G}$ рассмотрим модель деформации конструкции из двутавровых балок (4) – (6). Для модели (4) – (6) рассмотрим начальные условия Коши

$$j:\ x_j(s,0) = x_{0j}(s),\ \text{для всех } s \in (0,l_j), \tag{54}$$

или начальные условия Шоуолтера – Сидорова

$$j:\ (\lambda + \Delta)(x_j(s,0) - x_{0j}(s)) = 0,\ \text{для всех } s \in (0,l_j). \tag{55}$$

Пусть $\mathcal{H} = L_2(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, ..., g_j, ...) : g_j \in L_2(0,l_j)\}$. Множество $L_2(\mathbf{G})$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$< g,h >= \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} g_j(s)h_j(s)ds.$$

Положим $\mathfrak{H} = \{x = (x_1, x_2, ..., x_j, ...) : x_j \in W_2^1(0,l_j)$ и выполнено условие (6)$\}$, $\mathfrak{B}_n = L_{2n}(\mathbf{G})$. Формулой

$$< Cx,z >= \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} (x_{js}(s)z_{js}(s) + ax_j(s)z_j(s))ds,$$

где $a > 0$, $x, z \in \mathfrak{H}$, зададим оператор, определенный на пространстве $\mathfrak{H}$. Спектр оператора C вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $+\infty$, а его собственные функции образуют базис в пространстве $\mathfrak{H}$ [40]. Обозначим через $\{\varphi_i\}$ последовательность собственных функций однородной задачи Дирихле для оператора C на графе $\mathbf{G}$, а через $\{\mu_i\}$ – соответствующую последовательность собственных значений, занумерованную по неубыванию с учетом их кратности. Построим множества

$$\operatorname{coim} L = \{x \in \mathfrak{H} : \langle x, \varphi\rangle = 0, \ \forall \varphi \in \ker L \setminus \{0\}\},$$

$$\mathfrak{M} = \left\{ \begin{array}{c} L_{2k}(\mathbf{G}), \ \lambda + a < \mu_1; \\ \{x \in L_{2k}(\mathbf{G}) : \sum\limits_{E_j \in \mathrm{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} (\alpha_j^1 x_j + \alpha_j^2 x_j^3 + \alpha_j^3 x_j^5 + ... + \alpha_j^{k-1} x_j^{2k-3} + \\ +\alpha_j^k x_j^{2k+1})\varphi_{1_i} \, ds = \sum\limits_{E_j \in \mathrm{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} u_j \varphi_{1_i} \, ds\}, i = \overline{1, r}, \ \lambda + a = \mu_1, \end{array} \right. \tag{56}$$

и проектор

$$Q = \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{I}, \ \lambda + a < \mu_1; \\ \mathbb{I} - \sum\limits_{\lambda + a = \mu_1} \langle \cdot, \varphi_{1_i} \rangle \,. \end{array} \right.$$

Построим пространство

$$\mathfrak{X} = \{x | \ x \in L_\infty(0, T; \operatorname{coim} L) \cap L_{2k}(0, T; \mathfrak{M})), \ \frac{dx}{dt} \in L_2(0, T; \mathfrak{H})\}.$$

Определение 10. *Слабым обобщенным решением* уравнения (4) назовем вектор-функцию $x \in \mathfrak{X}$, удовлетворяющую условию

$$\begin{array}{c} \int\limits_0^T \varphi(t) \left[\sum\limits_{E_j \in \mathrm{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} \left((-\lambda - \Delta) \frac{dx_j}{dt} + \alpha_j^1 x_j + \alpha_j^2 x_j^3 + \alpha_j^k x_j^{2k-1} \right) w_j ds \right] dt = \\ = \int\limits_0^T \left[\varphi(t) \sum\limits_{E_j \in \mathrm{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} u_j w_j ds \right] dt, \forall w \in \mathfrak{H}, \forall \varphi \in L_2(0, T). \end{array} \tag{57}$$

Решение уравнения (4) назовем *решением задачи Коши,* если оно удовлетворяет (54).

Построим пространство

$$\mathfrak{X}_1 = \{x \in L_\infty(0, T; \operatorname{coim} L) \cap L_{2k}(0, T; L_{2k}(\mathbf{G})), \ \frac{dx}{dt} \in L_2(0, T; \operatorname{coim} L)\}.$$

Определение 11. *Слабым обобщенным решением* уравнения (4) назовем вектор-функцию $x \in \mathfrak{X}_1$, удовлетворяющую условию (57). Решение уравнения (4) назовем *решением задачи Шоуолтера – Сидорова,* если оно удовлетворяет (55).

Система $\{\varphi_k\}$ собственных векторов оператора L в силу вложений (11) образует базис в пространстве $L_2(\mathbf{G})$. Выберем в $L_2(\mathbf{G})$ ортонормальную систему $\{\varphi^i = (\varphi_1^i, \varphi_2^i, ..., \varphi_j^i, ...)\}$ так, чтобы $\operatorname{span}\{\varphi^1, \ \varphi^2, ..., \ \varphi^l\} = \ker L, \dim \ker L = l$. Построим галеркинские приближения решений задачи (4) – (6), (54) и задачи (4) – (6), (55) в виде (15), где коэффициенты $a^i = a^i(t)$, $i = 1, ..., m$ определяются системой уравнений

$$\begin{array}{c} \sum\limits_{E_j \in \mathrm{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} \left((-\lambda - \Delta) \dfrac{dx_j^m}{dt} + \alpha_1 x_j^m + \alpha_2 (x_j^m)^3 + \alpha_3 (x_j^m)^5 + ... + \right. \\ \left. + \alpha_{k-1} (x_j^m)^{2k-3} + \alpha_k (x_j^m)^{2k-1} \right) \varphi_j^i ds = \sum\limits_{E_j \in \mathrm{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} u_j \varphi_j^i ds, \end{array} \tag{58}$$

в случае условия Шоуолтера – Сидорова (55) – условием

$$\sum_{E_j\in \mathrm{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} (\lambda+\Delta)\left(x_j^m(s,0)-x_{0j}(s)\right)\varphi_j^i(s)ds=0, \tag{59}$$

а в случае условия Коши (54) – условием

$$\sum_{E_j\in \mathrm{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} \left(x_j^m(s,0)-x_{0j}(s)\right)\varphi_j^i(s)ds=0. \tag{60}$$

Уравнения (58) представляют собой вырожденную систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теорема 21. [41] *Пусть* $\lambda + a \leq \mu_1$ *и* $\alpha_j^n \in \mathbb{R}_+$, $n = 1, ..., k$. *Тогда при любых* $x_0 \in \mathfrak{M}$ *и* $u \in L_{\frac{2k}{2k-1}}(0,T;\mathfrak{B}_k^*)$ *существует единственное решение* $x \in \mathfrak{X}$ *задачи (4) – (6), (54).*

Теорема 22. [41] *Пусть* $\lambda + a \leq \mu_1$, $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$ *и* $\alpha_j^n \in \mathbb{R}_+$, $n = 1, ..., k$. *Тогда при любых* $x_0 \in \mathfrak{H}$ *и* $u \in L_{\frac{2k}{2k-1}}(0,T;\mathfrak{B}_k^*)$ *существует единственное решение* $x \in \mathfrak{X}_1$ *задачи (4) – (6), (55).*

Перейдем к рассмотрению задачи оптимального управления для математической модели деформации конструкции из двутавровых балок (4) – (6). Рассмотрим задачу оптимального управления

$$J(x,u)=\frac{1}{2k}\|x-z_d\|^{2k}_{L_{2k}(0,T;L_{2k}(\mathbf{G}))}+\frac{2k}{2k-1}\|u\|^{\frac{2k-1}{2k}}_{L_{\frac{2k}{2k-1}}(0,T;L_{\frac{2k}{2k-1}}(\mathbf{G}))}\to \inf. \tag{61}$$

Определение 12. Пару $(\tilde{x},\tilde{u}) \in \mathfrak{X}\times\mathfrak{U}_{ad}$ назовем *решением задачи оптимального управления* (4) – (6), (55), (61), если

$$J(\tilde{x},\tilde{u})=\inf_{(x,u)} J(x,u),$$

где пары $(x,u) \in \mathfrak{X}\times\mathfrak{U}_{ad}$ удовлетворяют (4) – (6), (55); вектор-функцию $\tilde{u}$ назовем *оптимальным управлением* в задаче (4) – (6), (55).

Выберем $\mathfrak{U}_{ad} \subset L_{\frac{2k}{2k-1}}(0,T;L_{\frac{2k}{2k-1}}(\mathbf{G})$ – непустое, замкнутое, выпуклое множество. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 23. [41] *Пусть* $\lambda \leq \lambda_1$, $\alpha_j^n \in \mathbb{R}_+$, $n = 1, ..., k$, *тогда при любых* $x_0 \in \mathfrak{H}$ *существует оптимальное управление в задаче (4) – (6), (55), (61).*

Перейдем к рассмотрению задачи оптимального управления для математической модели деформации конструкции из двутавровых балок (4) – (6) с условием Коши (54). Выберем $\mathfrak{U}^1_{ad} \subset L_{\frac{2k}{2k-1}}(\mathbf{G})$ – непустое, замкнутое, выпуклое множество, для которого выполнено $(\mathbb{I} - Q)u = 0$.

Теорема 24. [41] *Пусть* $\lambda \leq \lambda_1$, $\alpha_j^n \in \mathbb{R}_+$, $n = 1, ..., k$, *тогда при любых* $x_0 \in \mathfrak{M}$ *существует оптимальное управление в задаче (4) – (6), (54), (61).*

Автор выражает свою искреннюю признательность профессору Г.А. Свиридюку за постановку задачи, интерес к работе и предоставленные возможности.

Литература

1. Осколков, А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения нелинейных вязкоупругих жидкостей / А.П. Осколков // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1985. – Т. 147. – С. 110–119.
2. Амфилохиев, В.Б. Течения полимерных растворов при наличии конвективных ускорений / В.Б. Амфилохиев, Я.И. Войткунский, Н.П. Мазаева // Труды Ленинигpадского кораблестроительного института. – 1975. – Т. 96. – С. 3–9.
3. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство задачи Коши – Дирихле для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Известия вузов. Математика. – 2003. – № 9. – С. 36–41.
4. Дзекцер, Е.С. Обобщение уравнения движения грунтовых вод / Е.С. Дзекцер // ДАН СССР. – 1972. – № 5. – С. 1031–1033.
5. Свиридюк, Г.А. Разрешимость неоднородной задачи для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска / Г.А. Свиридюк, И.Н. Семенова // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24, № 9. – С. 1607–1611.
6. Hoff, N.J. Creep Buckling / N.J. Hoff // Aeron. – 1956. – V. 7, № 1. – P. 1–20.
7. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, В.О. Казак // Математические заметки. – 2002. – Т. 71, № 2. – С. 292–297.
8. Свиридюк, Г.А. Уравнения Хоффа на графах / Г.А. Свиридюк, В.В. Шеметова / Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 1. – С. 126–131.
9. Демиденко, Г.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г.В. Демиденко, С.В. Успенский. – Новосибирск: Науч. книга, 1998. – 438 с.
10. Осколков, А.П. Нелокальные задачи для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С.Л. Соболева / А.П. Осколков // Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1991. – Т. 198. – С. 31–48.
11. Demidenko, G.V. L_p-Theory of Boundary Value Problems for Sobolev Type Equaitons / G.V. Demidenko // Partial Diff. Equations (Banach Center Publications). – 1992. – V. 27. – P. 101–109.
12. Sidorov, N. Lyapunov – Shmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinithsyn, M. Falaleev. – Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 2002. – 548 p.
13. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln: VSP, 2003. – 216 p.
14. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 736 с.
15. Замышляева, А.А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка / А.А. Замышляева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 107 с.
16. Сагадеева, М.А. Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа / М.А. Сагадеева. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 107 с.
17. Lightbourne, J.H.A. A Partial Functional Differential Equation of Sobolev Type / J.H.A. Lightbourne // J. Math. Anal. Appl. – 1983. – V. 93, № 2. – P. 328–337.
18. Showalter, R.E. The Sobolev Equation / R.E. Showalter // Applicable Analysis. – 1975. – V. 5, № 1. – P. 15–22; V. 5, № 2. – P. 81–89.
19. Свиридюк, Г.А. Многообразие решений одного сингулярного псевдопараболического уравнения / Г.А. Свиридюк // ДАН СССР. – 1986. – Т. 289, № 6. – С. 1315–1318.
20. Свиридюк, Г.А. Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Сибирский математический журнал. – 1990. – Т. 31, № 5. – С. 109–119.

21. Favini, A. First Order Regular and Degenerate Identification Differential Problems / A. Favini, A. Lorenzi, H. Tanabe // Abstract and Applied Analysis. – 2015. – Article ID 393624, 42 p.
22. Свиридюк, Г.А. Задача Шоуолтера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 51–72.
23. Загребина, С.А. Начально-конечные задачи для неклассических моделей математической физики / С.А. Загребина// Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2013. – Т. 6, № 2. – С. 5–24.
24. Свиридюк, Г.А. Оптимальное управление линейными уравнениями типа Соболева с относительно p-секториальными операторами / Г.А. Свиридюк, А.А. Ефремов // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т. 31, № 11. – С. 1912–1919.
25. Федоров, В.Е. Оптимальное управление линейными уравнениями соболевского типа / В.Е. Федоров, М.В. Плеханова // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40, № 11. – С. 1548–1556.
26. Манакова, Н.А. Оптимальное управление решениями начально-конечной задачи для линейной модели Хоффа / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Математические заметки. – 2013. – Т. 94, № 2. – С. 225–236.
27. Келлер, А.В. Системы леонтьевского типа: классы задач с начальным условием Шоуолтера – Сидорова и численные решения / А.В. Келлер // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – № 2. – С. 30–43.
28. Келлер, А.В. Численное решение задач оптимального и жесткого управления для одной нестационарной системы леонтьевского типа / А.В. Келлер, М.А. Сагадеева // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. – 2013. – Т. 32, № 19. – С. 57–66.
29. Шестаков, А.Л. Оптимальное измерение динамически искаженных сигналов / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2011. – № 17 (234), вып. 8. – С. 70–75.
30. Шестаков, А.Л. Численное решение задачи оптимального измерения / А.Л. Шестаков, А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 1. – С. 107–115.
31. Замышляева, А.А. Оптимальное управление решениями задачи Шоуолтера – Сидорова – Дирихле для уравнения Буссинеска – Лява / А.А. Замышляева, О.Н. Цыпленкова // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49, № 11. – С. 1390–1398.
32. Гаевский, Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
33. Корпусов, М.О. Нелинейный функциональный анализ и математическое моделирование в физике: Методы исследования нелинейных операторов / М.О. Корпусов, А.Г. Свешников. – М.: УРСС, 2011. – 480 с.
34. Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 587 с.
35. Лионс, Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами / Ж.-Л. Лионс. – М.: Наука, 1987. – 367 с.
36. Свиридюк, Г.А. Задача оптимального управления для уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2005. – Т. 8, № 2. – С. 144–151.
37. Манакова, Н.А. Задачи оптимального управления для полулинейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова. – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 88 с.
38. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Н.А. Манакова // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т. 43, № 9. – С. 1185–1192.

39. Свиридюк, Г.А. Задача оптимального управления для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Вестник МаГУ. Математика. – Вып. 8. – Магнитогорск, 2005. – С. 113–122.

40. Баязитова, А.А. Задача Штурма – Лиувиля на геометрическом графе / А.А. Баязитова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2010. – № 16 (192), вып. 5. – С. 4–10.

41. Manakova, N.A. An Optimal Control to Solutions of the Showalter – Sidorov Problem for the Hoff Model of the Geometrical Graph // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – Chelyabinsk, 2014. – V. 1, № 1. – P. 26–33.

Поступила в редакцию 15 апреля 2015 г.

Наталья Александровна Манакова, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), manakovana@susu.ac.ru.

MSC 35K70 **DOI: 10.14529/mmp150301**

MATHEMATICAL MODELS AND OPTIMAL CONTROL OF THE FILTRATION AND DEFORMATION PROCESSES

N.A. Manakova, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, manakovana@susu.ac.ru

The article presents a review author's works on study of optimal control problems for semilinear Sobolev type models with s-monotone and p-coercive operators. Theorems of existence and uniqueness of weak generalized solution to the Cauchy or the Showalter – Sidorov problem for a class of degenerate non-classical models of mathematical physics are stated. The theory is based on the phase space and the Galerkin – Petrov methods. The developed scheme of a numerical method allows one to find an approximate solution to the Cauchy or Showalter – Sidorov problems for considered models. An abstract scheme for study of the optimal control problem for this class of models is constructed. On the basis of abstract results the existence of optimal control of processes of filtration and deformation are obtained. The necessary conditions for optimal control are provided.

Keywords: Sobolev type equations; optimal control; phase space method; Galerkin – Petrov method.

References

1. Oskolkov A.P. [Initial-Boundary Value Problems for Equations of Motion Nonlinear Viscoelastic Fluids]. *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 1985, vol. 147, pp. 110–119. (In Russian)
2. Amfilokhiev V.B., Voytkunskiy Ya.I., Mazaeva N.P. [The Flow of Polymer Solutions in the Presence of Convective Accelerations]. *Trudy Leninigradskogo korablestroitel'nogo instituta*, 1975, vol. 96, pp. 3–9. (In Russian)
3. Sviridyuk G.A., Manakova N.A. Phase Space of the Cauchy – Dirichlet Problem for the Oskolkov Equation of Nonlinear Filtration. *Russian Mathematics*, 2003, vol. 47, no. 9, pp. 33–38.
4. Dzektser E.S. [The Generalization of the Equations of Motion of Groundwater]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1972, no. 5, pp. 1031–1033. (In Russian)

5. Sviridyuk G.A., Semenova I.N. Solvability of an Inhomogeneous Problem for the Generalized Boussinesq Filtration Equations. *Differential Equations*, 1988, vol. 24, no. 9, pp. 1065–1069.
6. Hoff N.J. Creep Buckling. *Aeron*, 1956, vol. 7, no. 1, pp. 1–20.
7. Sviridyuk G.A., Kazak V.O. The Phase Space of an Initial-Boundary Value Problem for the Hoff Equation. *Mathematical Notes*, 2002, vol. 71, no. 1-2, pp. 262–266. DOI: 10.4213/mzm347
8. Sviridyuk G.A., Shemetova V.V. Hoff Equations on Graphs. *Differential Equations*, 2006, vol. 42, issue 1, pp. 139–145.
9. Demidenko G.V., Uspenskii S.V. *Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest Order Derivative.* N.Y., Basel, Hong Kong, Marcel Dekker, Inc., 2003.
10. Oskolkov A.P. Nonlocal Problems for One Class of Nonlinear Operator Equations that Arise in the Theory of Sobolev Type Equations. *Journal of Mathematical Sciences*, 1993, vol. 64, issue 1, pp. 724–736.
11. Demidenko G.V. L_p-Theory of Boundary Value Problems for Sobolev Type Equaitons. *Partial Diff. Equations (Banach Center Publications)*, 1992, vol. 27, pp. 101–109.
12. Sidorov N., Loginov B., Sinithyn A., Falaleev M. *Lyapunov – Shmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications.* Dordrecht, Boston, London, Kluwer Academic Publishers, 2002. 548 p.
13. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators.* Utrecht, Boston, Köln, VSP, 2003. 216 p.
14. Sveshnikov A.G., Al'shin A.B., Korpusov M.O., Pletner Yu.D. *Lineynye i nelineynye uravneniya sobolevskogo tipa* [Linear and Nonlinear the Sobolev Type Equations]. Moscow, FIZMATLIT, 2007. 736 c.
15. Zamyshlyaeva A.A. *Linear Sobolev Type Equations of High Order.* Chelyabinsk, Publ. Center of the South Ural State University, 2012. (In Russian)
16. Sagadeeva M.A. *Dichotomy of Solutions of Linear Sobolev Type Equations.* Chelyabinsk, Publ. Center of the South Ural State University, 2012. (In Russian)
17. Lightbourne J.H.A. A Partial Functional Differential Equation of Sobolev Type. *J. Math. Anal. Appl.*, 1983, vol. 93, no. 2, pp. 328–337.
18. Showalter R.E. The Sobolev Equation. *Applicable Analysis*, 1975, vol. 5, no. 1, pp. 15–22; vol. 5, no. 2, pp. 81–89.
19. Sviridyuk G.A. [The Manifold of Solutions of an Operator Singular Pseudoparabolic Equation]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1986, vol. 289, no. 6, pp. 1315–1318.(In Russian)
20. Sviridyuk G.A., Sukacheva T.G. The Cauchy Problem for a Class of Semilinear Equations of Sobolev Type. *Siberian Math. J.*, 1991, no. 5, pp. 794–802.
21. Favini A., Lorenzi A., Tanabe H. First Order Regular and Degenerate Identification Differential Problems. *Abstract and Applied Analysis*, 2015. Article ID 393624, 42 p.
22. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. The Showalter – Sidorov Problem as a Phenomena of the Sobolev-Type Equations. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics*, 2010, vol. 3, no. 1, pp. 104–125. (In Russian)
23. Zagrebina S.A. The Initial-Finite Problems for Nonclassical Models of Mathematical Physics. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2013, vol. 6, no. 2, pp. 5–24. (In Russian)
24. Sviridyuk G.A. Optimal Control of Sobolev Type Linear Equations with Relativity p-Sectorial Operators. *Differential Equations*, 1995, vol. 31, no. 11, pp. 1882–1890.
25. Fedorov V.E., Plekhanova M.V. Optimal Control of Sobolev Type Linear Equations. *Differential Equations*, 2004, vol. 40, issue 11, pp. 1627–1637.
26. Manakova N.A., Dyl'kov A.G. Optimal Control of the Solutions of the Initial-Finish Problem for the Linear Hoff Model. *Mathematical Notes*, 2013, vol. 94, no. 2, pp. 220–230.

27. Keller A.V. The Leontief Type Systems: Classes of Problems with the Showalter – Sidorov Intial Condition and Numerical Solving. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics*, 2010, no. 2, pp. 30–43. (In Russian)
28. Keller A.V., Sagadeeva M.A. [The Numerical Solution of Optimal and Hard Control for Nonstationary System of Leontiev Type]. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics, Physics*, 2013, vol. 32, no. 19, pp. 57–66. (In Russian)
29. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. Optimal Measurement of Dynamically Distorted Signals. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2011, no. 17 (234), issue 8, pp. 70–75. (In Russian)
30. Shestakov A.L., Keller A.V., Nazarova E.I. Numerical Solution of the Optimal Measurement Problem. *Automation and Remote Control*, 2012, vol. 73, no. 1, pp. 97–104. DOI: 10.1134/S0005117912010079
31. Zamyshlyaeva A.A., Tsyplenkova O.N. Optimal Control of Solutions of the Showalter – Sidorov – Dirichlet Problem for the Boussinesq – Love Equation. *Differential Equations,* 2013, vol. 49, no. 11, pp. 1356–1365. DOI: 10.1134/S0012266113110049
32. Gajewski H., Gröger K., Zacharias K. *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen.* Berlin, Akademie Verlag, 1974.
33. Al'shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. *Blow-up in Nonlinear Sobolev Type Equations.* Series in Nonlinear Analisys and Applications, 15, De Gruyter, 2011. DOI: 10.1515/9783110255294
34. Lions J.-L. *Quelques mérthodes de reśolution des problémes aux limites non linéaires.* Paris, Dunod, 1968.
35. Lions J.-L. *Contrôle optimal de systémes gouvernés par des équations aux dérivées partielles.* Paris, Dunod, 1968.
36. Sviridyuk G.A., Manakova N.A. An Optimal Control Problem for the Hoff Equation. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2007, vol. 1, no. 2, pp. 247–253.
37. Manakova N.A. *Optimal Control Problem for the Semilinear Sobolev Type Equations.* Chelyabinsk, Publ. Center of the South Ural State University, 2012. (In Russian)
38. Manakova N.A. Optimal Control Problem for the Oskolkov Nonlinear Filtration Equation. *Differential Equations*, 2007, vol. 43, no. 9, pp. 1213–1221.
39. Sviridyuk G.A., Manakova N.A. [Optimal Control Problem for the Generalized Boussinesq Filtration Equation]. *Vestnik Magnitogorskogo gosudarstvennogo universiteta. Seria: Matematika* [Bulletin of Magnitogorsk State University. Series: Mathematics], 2005, issue 8, pp. 113–122. (In Russian)
40. Bayazitova A.A. The Sturm – Liouville Problem on Geometric Graph. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2010, no. 16 (192), issue 5, pp. 4–10. (In Russian)
41. Manakova N.A. An Optimal Control to Solutions of the Showalter – Sidorov Problem for the Hoff Model of the Geometrical Graph. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2014, vol. 1, no. 1., pp. 26–33.

Received April 15, 2015