УДК 517.946 DOI: 10.14529/mmp160204

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ РЕЖИМОВ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

А.И. Кожанов

В работе изучается разрешимость обратных задач нахождения вместе с решением некоторых уравнений соболевского типа также неизвестных коэффициентов специального вида, определяющих граничные режимы (граничные данные) в первой или соответственно третьей начально-краевых задачах. Наличие в подобных задачах неизвестного коэффициента предполагает, что наряду с краевыми и начальными условиями, характерными для соответствующего класса дифференциальных уравнений, задается также дополнительное условие — условие переопределения. В настоящей работе условие переопределения есть условие интегрального переопределения — условие равенства нулю некоторых интегралов по сечениям цилиндрической области плоскостями t = const. Цель работы — доказательство существования регулярных (имеющих все обобщенные по С.Л. Соболеву производные, входящие в уравнение) решений. Наряду с конкретными результатами приведены некоторые возможные их обобщения.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа; обратные задачи; неизвестные граничные данные; интегральное переопределение; регулярные решения; разрешимость.

Задачи для дифференциальных уравнений, в которых вместе с решением требуется определить тот или иной параметр самой задачи, в математике и в математическом моделировании называют обратными задачами [1, 2]. В настоящей работе неизвестным параметром является коэффициент, определяющий граничный режим; предполагается, что этот коэффициент есть функция от временной переменной. Подобные задачи ранее изучались [3–9], но не для уравнений соболевского типа. Частично восполнить этот пробел и должна предлагаемая читателям статья.

Наличие в обратных задачах неизвестного параметра (коэффициента) предполагает, что наряду с краевыми условиями, характерными для соответствующего класса дифференциальных уравнений, задается дополнительное условие — условие переопределения. В настоящей работе условие переопределения есть условие интегрального переопределения, или, другими словами, условие равенства нулю некоторых интегралов от решения по пространственной области.

Для различных классов дифференциальных уравнений с частными производными задачи с условиями в виде равенства нулю некоторых интегралов от решения по пространственной области достаточно активно изучаются в последнее время, но при этом в основном рассматривается одномерный случай, и в основном изучаются задачи для параболических и гиперболических уравнений. Что же касается уравнений соболевского типа, то подобные задачи представляются мало изученными — отметить можно лишь работы [10–14].

И последнее замечание перед содержательной частью работы. По используемой технике настоящая статья близка к статьям автора [15, 16].

Перейдем к постановке задач и к изложению полученных результатов.

Пусть Ω есть ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (бесконечно-дифференцируемой) границей Γ, Q есть цилиндр $\Omega\times(0,T)$ конечной высоты T, $f(x,t)$,

$h(x)$, $N(x)$ есть заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$, $\sigma(x)$ есть заданная функция, определенная при $x \in \Gamma$, α есть заданное действительное число. Наконец, обозначим через S боковую границу цилиндра Q: $S = \Gamma \times (0,T)$.

Обратная задача I: *найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$ такие, что*

$$\frac{\partial}{\partial t}(u - \Delta u) + \alpha \Delta u = f(x,t), \tag{1}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(x,t) = q(t)h(x), \quad (x,t) \in S, \tag{3}$$

$$\int\limits_{\Omega} N(x)u(x,t)\,dx = 0, \quad t \in (0,T) \tag{4}$$

(здесь и далее Δ есть оператор Лапласа, действующий по переменным x_1, ..., x_n).

Обратная задача II: *найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$ такие, что для функции $u(x,t)$ выполняются условия (2) и (4), и выполняется также условие*

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} + \sigma(x)u(x,t) = q(t)h(x), \quad (x,t) \in S \tag{5}$$

(здесь и далее $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ есть вектор внутренней нормали к Γ текущей точке x).

Некоторые обобщения обратных задач I и II и полученных для них результатов, в том числе для иных, нежели (1), уравнений соболевского типа, будут приведены в конце работы.

Уравнение (1) представляет собой известное уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной, описывающее процесс фильтрации в трещиноватой среде [17].

Пусть $\{w_{1k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ есть система собственных функций задачи

$$\Delta w = \lambda w \quad \text{в} \quad \Omega, \quad w|_{\Gamma} = 0,$$

ортонормированная в пространстве $L_2(\Omega)$, λ_{1k}, $k = 1, 2, \ldots$, есть соответствующие собственные числа.

Определим линейное пространство X_1:

$$X_1 = \{v(x,t): \quad v(x,t) \in L_{\infty}(0,T; W_2^2(\Omega)), \quad v_t(x,t) \in L_2(0,T; W_2^2(\Omega))\}.$$

Зададим в этом пространстве норму:

$$\|v\|_{X_1} = \left(\|v\|^2_{L_{\infty}(0,T;W_2^2(\Omega))} + \|v_t\|^2_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))}\right)^{\frac{1}{2}};$$

очевидно, что пространство X_1 этой нормой является банаховым пространством.

Пусть $v_1(x,t)$ есть решение первой начально-краевой задачи для уравнения (1) с однородными условиями (2) и (3); при выполнении включения $f(x,t) \in L_2(Q)$ функция $v_1(x,t)$ существует и принадлежит пространству X_1. Далее, определим функцию $h_1(x)$ как решение задачи

$$\Delta h_1(x) - h_1(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \quad h_1(x) = h(x) \quad \text{при} \quad x \in \Gamma.$$

Наконец, построим функцию $V_1(x,t)$, представляющую собой решение задачи

$$\frac{\partial}{\partial t}(V_1 - \Delta V_1) + \alpha \Delta V_1 = -\alpha q(t) h_1(x), \quad (x,t) \in Q,$$

$$V_1(x,0) = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$V_1(x,t)|_S = 0.$$

Представим функцию $\Delta h_1(x)$ рядом Фурье:

$$\Delta h_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{1k} w_{1k}(x), \quad a_{1k} = \int_{\Omega} \Delta h_1(x) w_{1k}(x)\, dx.$$

Функцию $V_1(x,t)$ также определим рядом Фурье:

$$V_1(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) w_{1k}(x)$$

с неизвестными пока функциями $c_k(t)$. Эти неизвестные функции определим как решения задачи Коши

$$(1-\lambda_k)c_k'(t) + \alpha\lambda_{1k} c_k(t) = -\alpha a_{1k} q(t),$$

$$c_k(0) = 0.$$

Обозначим $\beta_{1k} = \frac{\alpha\lambda_{1k}}{1-\lambda_{1k}}$, $\gamma_{1k} = -\frac{\alpha\lambda_{1k}a_{1k}}{1-\lambda_{1k}}$. Имеют место равенства

$$c_k(t) = \gamma_{1k} \int_0^t e^{-\beta_{1k}(t-\tau)} q(\tau)\, d\tau, \quad V_1(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\gamma_{1k} \int_0^t e^{-\beta_{1k}(t-\tau)} q(\tau)\, d\tau \right] w_{1k}(x).$$

Введем еще обозначения:

$$\psi_1(t) = \int_{\Omega} N(x) v_1(x,t)\, dx, \quad b_{1k} = \int_{\Omega} N(x) w_{1k}(x)\, dx, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$G_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{1k} b_{1k} e^{-\beta_{1k} t}, \quad N_1 = \int_{\Omega} N(x) h_1(x)\, dx.$$

Рассмотрим интегральное уравнение

$$N_1 q(t) + \int_0^t G_1(t-\tau) q(\tau)\, d\tau = -\psi_1(t). \tag{6}$$

Это уравнение представляет собой интегральное уравнение Вольтерра. Имея разрешимость этого уравнения, нетрудно будет построить решение обратной задачи I.

Положим $\overline{\beta}_{1k} = \max(\beta_{1k}, 0)$.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$N(x) \in C(\overline{\Omega}), \quad h(x) \in W_2^2(\Omega), \quad f(x,t) \in L_2(Q);$$

числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{1k} b_{1k} e^{-\overline{\beta}_{1k} T}$$

абсолютно сходится;

$$N_1 \neq 0.$$

Тогда обратная задача I имеет решение $\{u(x,t), q(t)\}$ *такое, что* $u(x,t) \in X_1$, $q(t) \in W_2^1([0,T])$.

Доказательство. Из условий теоремы вытекает, что уравнение (8) есть интегральное уравнение Вольтерра второго рода, и что это уравнение имеет решение $q(t)$, принадлежащее пространству $W_2^1([0,T])$. Определим функцию $u(x,t)$:

$$u(x,t) = v_1(x,t) + q(t)h_1(x) + V_1(x,t).$$

Очевидно, что эта функция есть решение уравнения (1), и что для нее выполняются условия (2) и (4). Также очевидно, что для функций $u(x,t)$ и $q(t)$ выполняется равенство (3). Следовательно, функции $u(x,t)$ и $q(t)$ дают искомое решение задачи I.

Теорема доказана. □

Заметим, что в случае $N_1 = 0$ уравнение (6) будет уравнением Вольтерра первого рода. Как хорошо известно, в этом случае уравнение (6) требуется продифференцировать по переменной t, и если окажется, что $G_1(0) \neq 0$, то для функции $q(t)$ вновь будет выполняться уравнение Вольтерра второго рода. Уточним лишь, что в этой ситуации естественным образом появятся дополнительные условия на входные данные.

Для обратной задачи II имеют место результаты, в целом аналогичные вышеприведенным.

Пусть $\{w_{2k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ есть система собственных функций задачи

$$\Delta w = \lambda w \quad \text{в} \quad \Omega, \quad \frac{\partial w(x)}{\partial \nu} + \sigma(x) w(x)|_{\Gamma} = 0,$$

ортонормированная в пространстве $L_2(\Omega)$, λ_{2k}, $k = 1, 2, \ldots$, есть соответствующие собственные числа.

Далее, пусть функция $v_2(x,t)$ есть решение краевой задачи

$$\frac{\partial}{\partial t}(v_2 - \Delta v_2) + \alpha \Delta v_2 = f,$$

$$v_2(x,0) = 0, \quad \frac{\partial v_2(x,t)}{\partial \nu} + \sigma(x) v_2(x,t)|_S = 0,$$

функция $h_2(x)$ — решение задачи

$$\Delta h_2(x) - h_2(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial h_2(x)}{\partial \nu} + \sigma(x) h_2(x) = h(x) \quad \text{при} \quad x \in \Gamma.$$

Положим

$$a_{2k} = \int\limits_{\Omega} \Delta h_2(x) w_{2k}(x)\,dx, \quad \beta_{2k} = \frac{\alpha\lambda_{2k}}{1-\lambda_{2k}},$$

$$\gamma_{2k} = -\frac{\alpha\lambda_{2k}a_{2k}}{1-\lambda_{2k}}, \quad b_{2k} = \int\limits_{\Omega} N(x) w_{2k}(x)\,dx, \quad \psi_2(t) = \int\limits_{\Omega} N(x) v_2(x,t)\,dx,$$

$$G_2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{2k} b_{2k} e^{-\beta_{2k}t}, \quad N_2 = \int\limits_{\Omega} N(x) h_2(x)\,dx, \quad \overline{\beta}_{2k} = \max(\beta_{2k}, 0).$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия*

$$N(x) \in C(\overline{\Omega}), \quad h(x) \in W_2^2(\Omega), \quad \sigma(x) \in C(\Gamma), \quad f(x,t) \in L_2(Q);$$

$$\sigma(x) \leq 0 \quad \textit{при} \quad x \in \Gamma;$$

числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{2k} b_{2k} e^{-\overline{\beta}_{2k}T}$$

абсолютно сходится;

$$N_2 \neq 0.$$

Тогда обратная задача II имеет решение $\{u(x,t), q(t)\}$ *такое, что* $u(x,t) \in X_1$, $q(t) \in W_2^1([0,T])$.

Доказательство. Рассмотрим интегральное уравнение

$$N_2 q(t) + \int\limits_0^t G_2(t-\tau) q(\tau)\,d\tau = -\psi_2(t). \tag{7}$$

Решение $q(t)$ этого уравнения существует, и есть функция, принадлежащая пространству $W_2^1([0,T])$. Положим

$$V_2(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\gamma_{2k} \int\limits_0^t e^{-\beta_{2k}(t-\tau)} q(\tau)\,d\tau\right] w_{2k}(x), \quad u(x,t) = v_2(x,t) + q(t)h_2(x) + V_2(x,t).$$

Функции $u(x,t)$ и $q(t)$ и дадут искомое решение задачи II.

Теорема доказана. $\square$

В случае $N_2 = 0$, как и ранее, можно перейти к продифференцированному по переменной t уравнению (7).

Обсудим некоторые возможные обобщения полученных результатов. Пусть m есть целое положительное число, L есть оператор, действие которого на заданной функции $v(x,t)$ определяется равенством

$$Lv = \frac{\partial^m}{\partial t^m}(v - \Delta v) + \alpha \Delta v.$$

Для уравнения $Lu = f$ рассмотрим обратные задачи, аналогичные задачам I и II, но с заданием начальных условий

$$\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k}\bigg|_{t=0} = 0, \quad x \in \Omega, \quad k = 0, \dots, m-1.$$

Для этих задач нетрудно с помощью описанного выше алгоритма получить для функции $q(t)$ интегральное уравнение Вольтерра. При выполнении условий, вполне аналогичных условиям теорем 1 или 2, полученное интегральное уравнение будет разрешимо в нужном классе; имея же функцию $q(t)$, нетрудно построить функцию $u(x,t)$, для которой выполняется уравнение $Lu = f$, и выполняются соответствующие начальные и краевые условия.

Уточним, что при $m = 2$ уравнение $Lu = f$ является линейным уравнением Буссинеска распространения волн в плазме [18].

Следующее замечание. Как и в работе [9], рассмотрим обратные задачи, более общие по постановке, нежели изученные. Пусть $N_1(x)$, ..., $N_p(x)$, $h_1(x)$, ..., $h_p(x)$ есть заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$.

Обратная задача I_p: *найти функции* $u(x,t)$, $q_1(t)$, ..., $q_p(t)$ *такие, что для них выполняется условие*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{p} q_k(t) h_k(x), \quad (x,t) \in S,$$

для функции $u(x,t)$ *выполняются уравнение (1) и условие (2).*

Обратная задача II_p: *найти функции* $u(x,t)$, $q_1(t)$, ..., $q_p(t)$ *такие, что для них выполняется условие*

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} = \sum_{k=1}^{p} q_k(t) h_k(x), \quad (x,t) \in S,$$

для функции $u(x,t)$ *выполняются уравнение (1) и условие (2).*

Исследование разрешимости обратных задач I_p и II_p проводится в целом вполне аналогично исследованию разрешимости обратных задач I и II, отличие состоит лишь в том, что вместо одного интегрального уравнения Вольтерра появится система подобных уравнений.

Заметим, что обратные задачи типа задач I_p и II_p нетрудно изучить и для уравнений $Lu = f$ в случае $m > 1$.

В условиях (3) и (5) известная функция h вполне может быть функцией переменных x и t. Соответствующие числовые ряды в этом случае заменятся функциональными рядами, условие абсолютной сходимости — условием равномерной сходимости рядов, составленных из модулей слагаемых. Аналогичное уточнение можно сделать и для обратных задач I_p и II_p.

Далее, во всех описанных выше ситуациях оператор Лапласа можно заменить эллиптическим оператором в самосопряженной форме и с коэффициентами, не зависящими от переменной t.

Наконец, представленная техника вполне позволяет проанализировать ситуацию, когда условие (4) заменяется дискретным условием

$$\sum_{k=1}^{l} \delta_k u(x_k, t) = 0,$$

в котором δ_k есть заданные числа, x_k есть фиксированные точки из области Ω, $k = 1, \ldots, l$.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект 15-01-06582.

Литература

1. Prilepko, A.I. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics / A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky, I.A. Vasin. – N.Y.: Marcel Dekker, 1999.
2. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи / С.И. Кабанихин. – Новосибирск: Сибирское кн. изд-во, 2009.
3. Алексеев, Г.В. Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики / Г.В. Алексеев. – М.: Науч. мир, 2010.
4. Костин, А.Б. О некоторых задачах восстановления граничного условия для параболического уравнения / А.Б. Костин, А.И. Прилепко // Дифференциальные уравнения. – 1996. – Т. 32, № 1. – С. 127–136; Т. 32, № 11. – С. 1319–1328.
5. Борухов, В.Т. Применение неклассических краевых задач для восстановления граничных режимов процессов переноса / В.Т. Борухов, В.И. Корзюк // Вестник Белорусского университета. Сер. I. – 1998. – № 3. – С. 54–57.
6. Борухов, В.Т. Сведение одного класса обратных задач теплопроводности к прямым начально-краевым задачам / П.Н. Борухов, П.Н. Вабищевич, В.И. Корзюк // Инженерно-физический журнал. – 2000. – Т. 73, № 4. – С. 742–747.
7. Короткий, А.И. Реконструкция граничных режимов в обратной задаче тепловой конвекции несжимаемой жидкости / А.И. Короткий, Д.А. Ковтунов // Тр. ИММ ДВО АН. – 2006. – Т. 12, № 2. – С. 88–97.
8. Kozhanov, A.I. The Problem of Recovery of the Boundary Condition for a Heat Equation / A.I. Kozhanov // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: материалы 6-й Междунар. конф., посвященной памяти проф. А.А. Килбаса. – Минск: изд-во БГУ, 2012. – С. 87–96.
9. Кожанов, А.И. Линейные обратные задачи для некоторых классов нестационарных уравнений / А.И. Кожанов // Труды VI Международной молодежной школы-конференции «Теория и численные методы решений обратных и некорректных задач». Сибирские электронные математические известия. – 2015. – Т. 12. – С. 264–275.
10. Ионкин, Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием / Н.И. Ионкин // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. 13, № 2. – С. 294–304.
11. Пулькина, Л.С. Нелокальная задача с двумя интегральными условиями для гиперболического уравнения на плоскости / Л.С. Пулькина // Неклассические уравнения математической физики. – Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2007. – С. 232–236.
12. Кожанов, А.И. О разрешимости некоторых граничных задач со смещением для линейных гиперболических уравнений / А.И. Кожанов, Л.С. Пулькина // Математический журнал. – Алматы, 2009. – Т. 9, № 3. – С. 78–92.
13. Кожанов, А.И. О разрешимости краевых задач с нелокальными и интегральными условиями для параболических уравнений / А.И. Кожанов // Нелинейные граничные задачи. ИПММ НАН Украины. – 2010. – Т. 20. – С. 54–76.

14. Пулькина, Л.С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений / Л.С. Пулькина. – Самара: Изд-во Самарского гос. ун-та, 2012.
15. Кожанов, А.И. Задачи с условиями интегрального вида для некоторых классов нестационарных уравнений / А.И. Кожанов // Доклады Академии наук. – 2014. – Т. 467, № 2. – С. 152–156.
16. Кожанов, А.И. Разрешимость пространственно-нелокальных задач с условиями интегрального вида для некоторых классов нестационарных уравнений / А.И. Кожанов // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 8. – С. 1048–1055.
17. Баренблатт, Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24, № 5. – С. 852–864.
18. Demidenko, G.V. Partial Differential Equations and Systems not Solved with Respect to the Highest Order Derivative // G.V. Demidenko, S.V. Uspenskii. – N.Y.; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003.

Александр Иванович Кожанов, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, лаборатория дифференциальных и разностных уравнений, Институт математики им. С.Л. Соболева (г. Новосибирск, Российская Федерация), kozhanov@math.nsc.ru.

Поступила в редакцию 4 апреля 2016 г.

MSC 35M20, 35R30 **DOI: 10.14529/mmp160204**

Inverse Problems for Determining Boundary Regimes for Some Equations of Sobolev Type

A.I. Kozhanov, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russian Federation, kozhanov@math.nsc.ru

We study the solvability of the inverse problems of finding a solution to some Sobolev type equations along with the unknown coefficients of a special type defining the boundary modes (boundary data) in the first or the third initial-boundary value problems respectively. The presence of an unknown coefficient in such problems supposes that there is an additional condition – an overdetermination condition along with the initial and boundary conditions that are typical for the corresponding class of differential equations. In the present work this condition is represented by the integral overdetermination, when some integrals by the cross-section of the cylindrical domain by planes $t =$ const are equal to zero. The goal of this research is to prove the existence of regular (with all needed generalized according to S.L. Sobolev derivatives) solutions of equation. Along with the specific results there are also some of their possible generalizations.

Keywords: Sobolev type equations; inverse problems; unknown boundary data; integral overdetermination; regular solutions; solvability.

References

1. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics.* New York, Marcel Dekker, 1999.
2. Kabanikhin S.I. *Inverse and Ill-posed Problems.* Novosibirsk, Siberian publishing, 2009.

3. Alekseev C.V. *Optimization in the Stationary Problems of Heat and Mass Transfer and Magnetic Hydrodynamics.* Science World, 2010, pp. 142–143.
4. Kostin A., Prilepko A. *On Some Problems of Restoration of a Boundary Condition for a Parabolic Equation.* Differential Equations, 1996, vol. 32, no. 1, pp. 113–122.
5. Boruhov V.T., Korzyuk V.I. [Application Neoclassical Boundary Value Problems for the Restoration of Boundary Modes of Transport Processes]. *Vestnik Belorusskogo universiteta. Ser. I.*, 1998, no. 3, pp. 54–57. (in Russian)
6. Boruhov V.T., Vabishchevich P.N., Korzyuk V.I. [The Reduction of a Class of Inverse Problems of Heat Conduction to Direct the Initial-Boundary Value Problems]. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*, 2000, vol. 73, no. 4, pp. 742–747. (in Russian)
7. Korotkiy A.I. Reconstruction of Boundary Regimes in the Inverse Problem of Thermal Convection of an Incompressible Fluid. *Tr. IMM DVO AN*, 2006, vol. 12, no. 2, pp. 88–97. (in Russian)
8. Kozhanov A.I. The Problem of Recovery of the Boundary Condition for a Heat Equation. *Analiticheskiye metody analiza i differetsial'nyh uravneniy: materialy 6 mezhdunarodnoy konferentsyi pamyati prof. A.A. Kilbasa*, Minsk, Izd. BGU, 2012, pp. 87–96.
9. Kozhanov A.I. [Linear Inverse Problems for Certain Classes of Non-Stationary Equation]. *Trudy VI mezhdunarodnoy molodezhnoy shkoly-konferentsyi "Teoriya i chislennyye metody resheniy obratnyh i nekorrektnyh zadach"*. Sibirskiye Elektronnyye Matematicheskiye Izvestiya, 2015, vol. 12, pp. 264–275.
10. Ionkin N.I. [Solution of a Boundary-Value Problem in Heat Condition with a Nonclassical Boundary Condition]. *Differential Equations*, 1977, vol. 13, no. 2, pp. 204–211.
11. Pulkina L.S. [A Nonlocal Problem with Two Integral Conditions for Hyperbolic Equations on a Plane]. *Neklassicheskiye uravneniya matematicheskoy fiziki* [Non-Classical Equations of Mathematical Physics]. Novosibirsk, Institut matematiki SO RAN, 2007, pp. 232–236.
12. Kozhanov A.I. [On the Solvability of Some Boundary Value Problems with a Shift for Linear Hyperbolic Equations]. *Matematicheskiy zhurnal* [Mathematical Journal], Almaty, 2009, vol. 9, no. 3, pp. 78–92.
13. Kozhanov A.I. [On the Solvability of Boundary Value Problems with Non-Local and Integral Conditions for Parabolic Equations]. *Nelineynye granichnyye zadachi. IPMM NAN Ukrainy*, 2010, vol. 20, pp. 54–76.
14. Pulkina L.S. *Zadachi s neklassicheskimi usloviyami dlya giperbolicheskih uravneniy.* Samara, Izd. Samarskogo Universiteta, 2012.
15. Kozhanov A.I. *Problems with Integral-Type Conditions for Some Classes of Nonstationary Equations. Doklady Mathematics*, 2014, vol. 90, no. 1, pp. 440–443. DOI: 10.1134/S1064562414050044
16. Kozhanov A.I. *On the Solvability of Spatially Nonlocal Problems with Conditions of Integral Form for Some Classes of Non stationary Equations. Differential Equations*, 2015, vol. 5, no. 18, pp. 1043–1050. DOI: 10.1134/S001226611508008X
17. Barenblatt G.I., Zheltov Yu.P., Kochina I.N. Basic Concepts in the Theory of Seepage of Homogeneous Fluids in Fissyrized Rocks. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1960, vol. 24, no. 4, pp. 1268–1303.
18. Demidenko G.V., Uspenskii S.V. *Partial Differential Equations and Systems not Solved with Respect to the Highest Order Derivative.* N.Y., Basel, Hong Kong, Marcel Dekker, Inc., 2003.

Received April 4, 2016