УДК 517.633 DOI: 10.14529/mmp160403

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ГАЛЕРКИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА И ОЦЕНКА ЕГО ПОГРЕШНОСТИ

И.Е. Егоров, В.Е. Федоров, И.М. Тихонова

С помощью модифицированного метода Галеркина доказывается однозначная регулярная разрешимость краевой задачи для уравнения смешанного типа второго порядка с произвольным многообразием изменения типа. Теория таких уравнений исходит из прикладных задач, в частности, трансзвуковой газовой динамики.

Исследование проведено для случаев, когда вблизи нижнего основания цилиндрической области уравнение имеет эллиптический тип, а вблизи верхнего основания цилиндра – гиперболический или эллиптический тип. В последнем случае разрешимость этой краевой задачи ранее была изучена авторами с помощью другой методики, там впервые была сформулирована ее постановка. Кроме того, в настоящей работе получена оценка погрешности приближенных решений краевой задачи относительно точного решения через параметр регуляризации и собственные значения спектральной задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа; краевая задача; приближенное решение; регуляризация; метод Галеркина; оценка погрешности.

Введение

Построение общей теории краевых задач для уравнений смешанного типа с произвольным многообразием изменения типа было начато в 70-е годы прошлого века В.Н. Враговым и рядом других авторов [1–4]. В дальнейшем эта теория развивалась во многих направлениях [5–10]. При исследовании краевых задач для уравнений смешанного типа общего вида применялись функциональные методы, метод регуляризации, метод Галеркина. Теория таких уравнений имеет важное значение при решении задач, возникающих в трансзвуковой газовой динамике [7] и во многих прикладных задачах механики.

В работе [11] стационарный метод Галеркина применяется к решению первой краевой задачи для уравнения смешанного типа, в работе [12] для этой задачи получена оценка погрешности стационарного метода Галеркина через собственные числа оператора Лапласа по переменным $x \in R^n$ и t. В работе [13] к решению краевой задачи для уравнения смешанного типа в постановке В.Н. Врагова применен модифицированный метод Галеркина, и получена оценка его погрешности.

В настоящей работе рассматривается краевая задача для уравнения смешанного типа второго порядка, которая в общем случае отличается от задач В.Н. Врагова [2,3] и А.Н. Терехова [4]. В случаях, когда уравнение имеет эллиптический тип вблизи нижнего основания цилиндрической области, а вблизи верхнего основания оно имеет эллиптический или гиперболический тип, с помощью модифицированного метода Галеркина установлена однозначная регулярная разрешимость краевой задачи в пространстве Соболева. Впервые постановка этой задачи была сформулирована авторами в работе [14], в которой ее разрешимость была исследована для первого случая с помощью другой методики. В данной работе используется новый подход, который позволяет получить априорные оценки для приближенных решений сразу по всей области, на основании которых получена оценка погрешности модифицированного метода Галеркина.

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset R^n$ – ограниченная односвязная область с гладкой границей S. Положим

$$Q = \Omega \times (0, T),\ S_T = S \times (0, T),\ T = \mathrm{const} > 0;\ \Omega_t = \Omega \times \{t\},\ t \in [0, T].$$

В цилиндрической области Q рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv k(x,t)u_{tt} - \Delta u + a(x,t)u_t + c(x)u = f(x,t). \tag{1}$$

Коэффициент $k(x,t)$ может менять знак внутри области Q произвольным образом. Поэтому уравнение (1) является уравнением смешанного типа с произвольным многообразием изменения типа.

Предполагается, что коэффициенты уравнения (1) – гладкие функции. Введем множества

$$P_0^{\pm} = \{(x,0):\ x \in \Omega,\ k(x,0)^{>0}_{<0}\},\quad P_T^{\pm} = \{(x,T):\ x \in \Omega,\ k(x,T)^{>0}_{<0}\}.$$

Краевая задача. Найти в области Q решение уравнения (1), такое, что

$$u\,|_{S_T} = 0,\ u\,|_{\overline{P}_0^+} = 0,\ u_t\,|_{t=0} = 0,\ u_t\,|_{\overline{P}_T^-} = 0. \tag{2}$$

Отметим, что при $k(x,0) > 0$ задача (1), (2) совпадает с задачей Врагова [2, 3].

2. Априорные оценки

Пусть C_L есть множество гладких функций, удовлетворяющих условиям (2).

Лемма 1. *Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой, и выполнены условия:*

$$k(x,0) < 0,\ a - \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0.$$

Тогда существуют неотрицательные гладкие функции $\varphi(t),\ \psi(t)$, такие, что для всех функций $u \in C_L$ имеет место неравенство

$$(Lu, \varphi u_t + \psi u) \geq C_1\|u\|_1^2;\ C_1 = \mathrm{const} > 0.$$

Доказательство. Найдется положительное число $t_0 < T$, а также числа $t_1,\ t_2$ такие, что

$$k(x,t) \leqslant -\delta_1 < 0,\ t \in [0, t_0],\ 0 < t_2 < t_1 < t_0 < T.$$

Выбираем функции $\varphi(t),\ \psi(t) \in C^\infty[0,T]$ таким образом, чтобы

$$\varphi(0) = 0,\ \varphi'(t) \geqslant 0,\ t \in [0, t_2];\ \varphi'(t) \leqslant 0,\ t \in [t_2, T];$$

$$\varphi(t) = e^{-2\lambda t},\ t \in [t_1, T],\ \lambda > 0;$$

$$\psi(t) = 1 + \frac{1}{2}\varphi'(t),\ t \in [0, t_2];\ \psi(t) = 1 - \frac{1}{2}\varphi'(t),\ t \in [t_2, t_1];$$

$$\psi'(t) \leqslant 0,\ t \in [t_1, T];\ \psi(t) = 0,\ t \in [t_0, T].$$

Для функций $u \in C_L$ с помощью интегрирования по частям получим соотношение

$$(Lu, \varphi u_t + \psi u) = \int_Q \Bigg\{ [(a - \frac{1}{2}k_t)\varphi - (\psi + \frac{1}{2}\varphi_t)k]u_t^2 +$$
$$+ (\psi - \frac{1}{2}\varphi_t)\left[\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + cu^2\right] + [a\psi - (k\psi)_t]u_t u \Bigg\} dQ + I, \quad (3)$$

где

$$I \equiv \frac{1}{2}e^{-2\lambda T}\left[\int_{P_T^+} k u_t^2 dx + \int_{\Omega_T}\left(cu^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\right)dx\right] \geqslant 0.$$

Теперь выберем $\lambda > 0$ так, чтобы $\delta + \lambda k \geqslant \delta/2$. Тогда получим, что

$$(a - \frac{1}{2}k_t)\varphi - k(\psi + \frac{1}{2}\varphi_t) \geqslant \min\{\delta_1, \frac{1}{2}\delta e^{-2\lambda T}\},\ \psi - \frac{1}{2}\varphi_t \geqslant \min\{1, \lambda e^{-2\lambda T}\}.$$

Далее из соотношения (3), используя неравенство Коши и условия леммы, получаем утверждение леммы 1. □

Для $\varepsilon > 0$ положим $L_\varepsilon u = -\varepsilon u_{ttt} + Lu$. В качестве базисных функций берем $\varphi_k(x)$, которые являются собственными функциями спектральной задачи

$$-\Delta\varphi = \lambda\varphi,\ x \in \Omega,\ \varphi|_s = 0.$$

При этом функции $\varphi_k(x)$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$, а соответствующие собственные числа таковы, что $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant ...$ и $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$.

В дальнейшем будем считать, что $k(x, 0) < 0$. Приближенное решение $u^{N,\varepsilon}(x, t)$ краевой задачи (1), (2) ищем в виде

$$u^{N,\varepsilon}(x,t) \equiv v(x,t) = \sum_{k=1}^N c_k^{N,\varepsilon}(t)\varphi_k(x), \quad N \geqslant 1, \quad \varepsilon > 0,$$

в котором $c_k^{N,\varepsilon}(t)$ определяются как решение следующей краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка:

$$(L_\varepsilon u^{N,\varepsilon}, \varphi_l)_0 = (f, \varphi_l)_0, \quad (4)$$

$$D_t c_l^{N,\varepsilon}|_{t=0} = 0,\ D_t^2 c^{N,\varepsilon}|_{t=0} = 0,\ D_t c_l^{N,\varepsilon}|_{t=T} = 0,\ l = \overline{1, N}, \quad (5^1)$$

при $k(x, T) < 0$ или

$$D_t c_l^{N,\varepsilon}|_{t=0} = 0,\ D_t^2 c^{N,\varepsilon}|_{t=0} = 0,\ D_t^2 c_l^{N,\varepsilon}|_{t=T} = 0,\ l = \overline{1, N}, \quad (5^2)$$

при $k(x, T) > 0$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1, $f \in L_2(Q)$, и имеет место один из следующих случаев: либо $k(x,T) < 0$, либо $k(x,T) > 0$. Тогда существует число $\varepsilon_0 > 0$, такое, что для приближенных решений краевой задачи (1), (2) справедлива оценка*

$$\varepsilon \int_Q \varphi v_{tt}^2 dQ + \|v\|_1^2 \leqslant C_2 \|f\|^2,\ C_2 > 0,\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0. \tag{6}$$

Доказательство. Из $(4), (5^l)$ получаем соотношение

$$(f, \varphi v_t + \psi v) = \varepsilon \int_Q \varphi v_{tt}^2 dQ - \varepsilon \int_Q \left[\frac{1}{2}(3\psi_t + \varphi_{tt}) v_t^2 + \psi_{tt} v_t v\right] dQ$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon \int_{\Omega_T} \varphi_t v_t^2 dx + (Lv, \varphi v_t + \psi v). \tag{7}$$

Для функций v имеет место равенство (3). Достаточно рассмотреть случай $k(x,T) \geqslant \delta_2 > 0$. Выберем число $\varepsilon_0 > 0$ так, что $\lambda\varepsilon_0 \leqslant \frac{\delta_2}{2}$. Тогда имеем

$$I - \lambda\varepsilon e^{-2\lambda T} \int_{\Omega_T} v_t^2 dx \geqslant 0.$$

Теперь при необходимости уменьшая ε_0, с учетом (3) из соотношения (7) получаем априорную оценку (6). □

Лемма 3. *Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой, выполнены условия*

$$a - \frac{1}{2}|k_t| \geq \delta > 0;\ f, f_t \in L_2(Q),$$

и имеет место один из следующих случаев: либо $k(x,0) < 0,\ k(x,T) < 0$, либо $k(x,0) < 0,\ k(x,T) > 0$. Тогда существует число $\varepsilon_0 > 0$, такое, что для приближенных решений краевой задачи (1),(2) справедлива оценка

$$\int_Q \left[v_{tt}^2 + \sigma \sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2\right] dQ \leqslant C_3 \left[||f||^2 + ||f_t||^2\right],\ C_3 > 0,\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, \tag{8}$$

где $\sigma = 1$ при $k(x,T) < 0$ и $\sigma = 0$ при $k(x,T) > 0$.

Доказательство. Для неотрицательных бесконечно дифференцируемых функций $\xi,\ \eta$ из $(4), (5^l)$ получаем соотношение

$$-(f, \xi v_{ttt} + \eta v_{tt}) = \varepsilon \int_Q \xi (v_{ttt})^2 dQ - \frac{1}{2}\varepsilon \int_Q \eta_t v_{tt}^2 dQ +$$
$$+\int_Q \left\{\left[(a + \frac{1}{2}k_t)\xi - k(\eta - \frac{1}{2}\xi_t)\right] v_{tt}^2 + (\eta - \frac{3}{2}\xi_t) \sum_{i=1}^n (v_{tx_i})^2\right\} dQ$$
$$+\int_Q \left[(a\xi)_t + c\xi - a\eta\right] v_{tt} v_t dQ + \int_Q (c\xi_t - c\eta) v_{tt} v dQ + \int_Q (\eta_t - \xi_{tt}) \sum_{i=1}^n v_{tx_i} v_{x_i} dQ + J, \tag{9}$$

где

$$J \equiv \int_\Omega \left[\frac{1}{2}(\varepsilon\eta - k\xi)v_{tt}^2 - a\xi v_{tt}v_t + \frac{1}{2}\xi\sum_{i=1}^{n} v_{tx_i}^2 + \right.$$
$$\left. + \Delta v(\xi v_{tt} - \xi_t v_t) - c\xi v v_{tt} - \eta\sum_{i=1}^{n} v_{x_i}v_{tx_i}\right] dx|_{t=0}^{t=T}.$$

Сначала рассмотрим случай, когда $k(x,0) < 0,\ k(x,T) < 0$. Тогда найдется положительное число $T_0 < T$ такое, что

$$k(x,t) \le -\delta_1 < 0,\ \ T_0 \le t \le T.$$

Выберем функции $\xi(t), \eta(t)$ такие, что

$$\xi(t) = \mu > 0,\ 0 \le t \le T_0;$$

$$\xi(T) = 0;\ \xi'(t) \leqslant 0,\ \ T_0 \le t \le T;$$
$$\eta(t) \equiv 1.$$

Теперь выберем число $\mu > 0$ так, чтобы

$$\delta\mu - \max_{\overline{Q}} |k| \geqslant \delta_2 > 0.$$

Тогда будем иметь

$$A \equiv (a + \frac{1}{2}k_t)\xi - k(\eta - \frac{1}{2}\xi_t) \geqslant \min\{\delta_1, \delta_2\}.$$

В силу условий (5^1) получаем, что $J = \frac{1}{2}\varepsilon\int\limits_{\Omega_T} v_{tt}^2 dx$ неотрицательна.

Применяя неравенство Коши в подчиненных членах равенства (9), получим априорную оценку (8) при $\sigma = 1$.

Теперь рассмотрим случай, когда $k(x,0) < 0,\ k(x,T) > 0$. Пусть $\xi(t) \equiv 1$, $\eta(t) \equiv 0$. Тогда с учетом условий леммы и (5^2) получаем, что

$$J = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_T}\sum_{i=1}^{n} v_{tx_i}^2 dx \geqslant 0,\ \ A \geqslant \delta.$$

Применяя неравенство Коши в подчиненных членах равенства (9), получим априорную оценку (8) при $\sigma = 0$. □

Лемма 4. *Пусть выполнены все условия леммы 3. Тогда существует число $\varepsilon_0 > 0$, такое, что для приближенных решений краевой задачи (1),(2) справедлива оценка*

$$\|\Delta v\|^2 \leqslant C_4(\|f\|^2 + \|f_t\|^2),\ \ C_4 > 0,\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0. \tag{10}$$

Доказательство. Для неотрицательных гладких функций $\xi(t),\ \eta(t)$ из (4) получаем соотношение

$$-(f, \xi\Delta v_t + \eta\Delta v) = \varepsilon\int_Q \left[\xi\sum_{i=1}^{n} v_{ttx_i}^2 - \frac{1}{2}(\xi_{tt} + 3\eta_t)\sum_{i=1}^{n} v_{tx_i}^2 - \eta_{tt}\sum_{i=1}^{n} v_{x_i}v_{tx_i}\right] dQ +$$

$$+\int\limits_Q \Big\{ \left(\eta - \tfrac{1}{2}\xi_t\right)(\Delta v)^2 + \left[a\xi - \tfrac{1}{2}(k\xi)_t\right] \sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2 + \xi v_{tt} \sum_{i=1}^n k_{x_i} v_{tx_i} + \tag{11}$$

$$+ v_t \xi \sum_{i=1}^n a_{x_i} v_{tx_i} + \xi c \sum_{i=1}^n v_{tx_i} v_{x_i} + \xi v \sum_{i=1}^n c_{x_i} v_{tx_i} - \eta(k v_{tt} + a v_t + c v)\Delta v \Big\} dQ + K,$$

где

$$K \equiv \int_\Omega \Big[\tfrac{1}{2}\varepsilon(\xi_t + \eta) \sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2 + \varepsilon\xi v_{tt}\Delta v_t + \varepsilon\eta_t \sum_{i=1}^n v_{tx_i} v_{x_i} +$$

$$+ \varepsilon\eta v_{tt}\Delta v + \tfrac{1}{2}\xi(\Delta v)^2 + \tfrac{1}{2}k\xi \sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2 \Big] dx \Big|_{t=0}^{t=T}.$$

При $k(x,0) < 0$, $k(x,T) < 0$ предполагаем, что $\xi(t) = \varphi(t)$, $\eta(t) = \psi(t)$, где функции φ, ψ построены в ходе доказательства леммы 1. С учетом условий леммы и (5^1) получаем, что

$$K = \frac{e^{-2\lambda T}}{2} \int_{\Omega_T} (\Delta v)^2 dx \geqslant 0.$$

Теперь с учетом теоремы о следах для $f(x,T)$ и выражения для K, неравенства (6), оценки (8) при $\sigma = 1$ из соотношения (11) получим оценку (10).

В случае $k(x,0) < 0$, $k(x,T) > 0$ достаточно положить $\xi(t) \equiv 0$, $\eta(t) \equiv 1$. С учетом условия (5^2) соотношение (11) принимает вид

$$-(f, \Delta v) = \int_Q \left[(\Delta v)^2 - (k v_{tt} + a v_t + c v)\Delta v\right] dQ + \frac{1}{2}\varepsilon \int_{\Omega_T} \sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2 dx.$$

Из последнего соотношения, используя неравенство Коши и оценки (6), (8) при $\sigma = 0$, получаем априорную оценку (10). □

3. Разрешимость и оценка погрешности

Теорема 1. *Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой, выполнены условия*

$$a - \frac{1}{2}|k_t| \geq \delta > 0, \quad f, f_t \in L_2(Q),$$

и имеет место один из следующих случаев: либо $k(x,0) < 0$, $k(x,T) < 0$, либо $k(x,0) < 0$, $k(x,T) > 0$. Тогда краевая задача (1), (2) имеет единственное решение $u(x,t)$ из $W_2^2(Q)$, и справедлива оценка

$$\|u\|_2 \leqslant C_5(\|f\| + \|f_t\|), \quad C_5 > 0.$$

Доказательство. Из неравенств (6), (8), (10) и второго основного неравенства для оператора Лапласа для приближенных решений краевой задачи (1), (2) имеет место оценка

$$\|u^{N,\varepsilon}\|_2 \leqslant C_5(\|f\| + \|f_t\|), \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0. \tag{12}$$

В силу оценки (12) стандартным образом доказывается существование искомого решения краевой задачи (1), (2), а его единственность следует из леммы 1. □

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда для погрешности модифицированного метода Галеркина справедлива оценка*

$$||u - u^{N,\varepsilon}||_1 \leq C_6(||f|| + ||f_t||)(\varepsilon^{1/2} + \lambda_{N+1}^{-1/4}),\ C_6 > 0, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, \tag{13}$$

где $u(x,t)$ – точное решение краевой задачи (1), (2).

Доказательство. Рассмотрим функции $\xi(t) = \varphi(t)$, $\eta(t) = \psi(t)$, построенные в ходе доказательства леммы 1. В пространстве $L_2(Q)$ введем линейное многообразие

$$H_N = \{\gamma(x,t) = \sum_{l=1}^{N} d_l(t)\varphi_l(x) :\ d_l \in W_2^2(0,T),\ d_l'(0) = d_l'(T) = 0,\ l = \overline{1,N}\},$$

при $k(x,T) < 0$, или

$$H_N = \{\gamma(x,t) = \sum_{l=1}^{N} d_l(t)\varphi_l(x) :\ d_l \in W_2^2(0,T),\ d_l'(0) = 0,\ l = \overline{1,N}\},$$

при $k(x,T) > 0$.

Из равенств (4) путем арифметических действий легко получить соотношение

$$(L_\varepsilon u^{N,\varepsilon}, \xi\gamma_t + \eta\gamma) = (f, \xi\gamma_t + \eta\gamma),\ \forall\gamma \in H_N.$$

Кроме того, $(Lu, \xi\gamma_t + \eta\gamma) = (f, \xi\gamma_t + \eta\gamma),\ \forall\gamma \in H_N.$

Из этих равенств получаем:

$$(L(u - u^{N,\varepsilon}), \xi\gamma_t + \eta\gamma) = -(\varepsilon u_{ttt}^{N,\varepsilon}, \xi\gamma_t + \eta\gamma),\ \forall\gamma \in H_N.$$

Для любой функциии ω из H_N положим $\gamma = \omega - u^{N,\varepsilon}$. Тогда

$$\int_Q L(u - u^{N,\varepsilon})[\xi(u_t - u_t^{N,\varepsilon}) + \eta(u - u^{N,\varepsilon})]dQ =$$

$$= \varepsilon \int_Q u_{tt}^{N,\varepsilon}[\xi(\omega_{tt} - u_{tt}^{N,\varepsilon}) + \eta(\omega_t - u_t^{N,\varepsilon}) + \xi_t(\omega_t - u_t^{N,\varepsilon}) + \eta_t(u - \omega)]dQ +$$

$$+ \int_Q (f - Lu^{N,\varepsilon})[\xi(u_t - \omega_t) + \eta(u - \omega)]dQ. \tag{14}$$

В силу теоремы 1 краевая задача (1), (2) имеет единственное решение $u(x,t)$ из $W_2^2(Q)$, такое, что $u = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k$, $u_t \in W_2^1(Q)$, $u_t = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k'\varphi_k$, $c_k = (u, \varphi_k)_0$, и справедливы оценки

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \int_0^T |c_k'(t)|^2 dt = \int_Q \sum_{k=1}^{n} (u_{tx_k})^2 dQ \leqslant C_7(\|f_t\|^2 + \|f\|^2),\ C_7 > 0. \tag{15}$$

При $\omega = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k(t)\varphi_k(x)$ имеем:

$$\int_\Omega |u_t - \omega_t|^2 dx = \|\sum_{k=N+1}^{\infty} c_k'(t)\varphi_k\|_0^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} |c_k'(t)|^2.$$

Тогда

$$\|u_t - \omega_t\|^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} \int_0^T |c_k'(t)|^2 dt \leqslant \frac{1}{\lambda_{N+1}} \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_k \int_0^T |c_k'(t)|^2 dt. \tag{16}$$

Аналогично справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \int_0^T |c_k(t)|^2 dt = \int_Q \sum_{k=1}^{n} (u_{x_k})^2 dQ \leqslant C_8 \|f\|^2,\ C_8 > 0, \tag{17}$$

а также равенство

$$\int_\Omega |u - \omega|^2 dx = \| \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k(t) \varphi_k \|_0^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} |c_k(t)|^2.$$

Тогда

$$\|u - \omega\|^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} \int_0^T |c_k(t)|^2 dt \leqslant \frac{1}{\lambda_{N+1}} \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_k \int_0^T |c_k(t)|^2 dt. \tag{18}$$

Используя лемму 1, с учетом неравенств (15) – (18) из равенства (14) получаем оценку (13) погрешности модифицированного метода Галеркина. □

Замечание 1. Краевая задача (1), (2) при $k(x,0) > 0$, $k(x,T) \geqslant 0$ и $k(x,0) > 0$, $k(x,T) < 0$ совпадает с краевой задачей В.Н. Врагова. Следовательно, для краевой задачи (1), (2) в этих случаях справедливы аналогичные результаты [13].

Работа выполнена в рамках Государственного задания Минобрнауки России на 2014–2016 годы (проект №3047).

Литература

1. Каратопраклиев, Г.Д. Об одном классе уравнений смешанного типа в многомерных областях / Г.Д. Каратопраклиев // Доклады АН СССР. – 1976. – Т. 230, № 4. – С. 769–772.
2. Врагов, В.Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа / В.Н. Врагов // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. 13, № 6. – С. 1098–1105.
3. Врагов, В.Н. О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанно-составного типа / В.Н. Врагов // Математический анализ и смежные вопросы математики. – Новосибирск: Наука, 1978. – С. 5–13.
4. Терехов, А.Н. Краевая задача для уравнения смешанного типа / А.Н. Терехов // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики. – Новосибирск: ИМ СО РАН, 1979. – С. 128–136.
5. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов / Т.Д. Джураев. – Ташкент: ФАН, 1979.
6. Моисеев, Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром / Е.И. Моисеев. – М.: Изд-во МГУ, 1988.
7. Кузьмин, А.Г. Неклассические уравнения смешанного типа и их приложение к газодинамике / А.Г. Кузьмин. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1990.
8. Егоров, И.Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка / И.Е. Егоров, В.Е. Федоров. – Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995.

9. Егоров, И.Е. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа высокого порядка /И.Е. Егоров, В.Е. Федоров // Математические заметки ЯГУ. – 1999. – Т. 6, вып. 1. – С. 26–35.
10. Чуешев, А.В. Разрешимость краевых задач для уравнений смешанного типа высокого порядка: дис. ... канд. физ.-мат. наук / А.В. Чуешев. – Новосибирск: НГУ, 2001.
11. Егоров, И.Е. О стационарном методе Галеркина для уравнения смешанного типа второго порядка / И.Е. Егоров, И.М. Тихонова // Математические заметки ЯГУ. – 2010. – Т. 17, вып. 2. – С. 41–47.
12. Егоров, И.Е. Применение стационарного метода Галеркина для уравнения смешанного типа / И.Е. Егоров, И.М. Тихонова // Математические заметки ЯГУ. – 2012. – Т. 19, вып. 2. – С. 20–28.
13. Егоров, И.Е. Применение модифицированного метода Галеркина к уравнению смешанного типа / И.Е. Егоров, И.М. Тихонова // Математические заметки СВФУ. – 2014. – Т. 21, № 3. – С. 14–19.
14. Тихонова, И.М. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа второго порядка / И.М. Тихонова, В.Е. Федоров // Математические заметки ЯГУ. – 2010. – Т. 17, вып. 2. – С. 109–117.

Иван Егорович Егоров, доктор физико-математических наук, профессор, Научно-исследовательский институт математики Северо-Восточного федерального университета им. М.К. Аммосова (г. Якутск, Российская Федерация), IvanEgorov51@mail.ru.

Валерий Евстафьевич Федоров, кандидат физико-математических наук, доцент, Научно-исследовательский институт математики Северо-Восточного федерального университета им. М.К. Аммосова (г. Якутск, Российская Федерация), VEFedorov58@mail.ru.

Ирина Михайловна Тихонова, Научно-исследовательский институт математики Северо-Восточного федерального университета им. М.К. Аммосова (г. Якутск, Российская Федерация), IrinaMikh3007@mail.ru.

Поступила в редакцию 1 августа 2016 г.

MSC 35M12 **DOI: 10.14529/mmp160403**

MODIFIED GALERKIN METHOD FOR THE SECOND ORDER EQUATION OF MIXED TYPE AND ESTIMATE OF ITS ERROR

I.E. Egorov, Mathematical Scientific Research Institute NEFU (Yakutsk, Russian Federation)***,***
V.E. Fedorov, Mathematical Scientific Research Institute NEFU (Yakutsk, Russian Federation)***,***
I.M. Tikhonova, Mathematical Scientific Research Institute NEFU (Yakutsk, Russian Federation)

In this paper, we investigate the boundary value problem for the second order equation of mixed type with an arbitrary manifold of type changing. The theory of such equations is based on the applications, in particular, of the transonic gas dynamics. We study equation of elliptic type near the bottom of the cylindrical domain and the hyperbolic or elliptic type near the top of the cylindrical domain. The last case was formulated and studied by authors with another method in the early works. We proved an error estimate for the modified Galerkin method using the regularization parameter and eigenvalues of the Dirichlet problem for the Laplas equation.

Keywords: equation of mixed type; boundary value problem; approximate solution; Galerkin method; error estimation; regularization.

References

1. Karatoprakliev G.D. [A Class of Mixed Type Equations in Multidimensional Domains]. *Doklady Mathematics*, 1976, vol. 230, no. 4, pp. 769–772. (in Russian)
2. Vragov V.N. [To the Theory of Boundary Value Problems for Mixed Type Equations in Space]. *Differentsial'nye uravneniya*, 1977, vol. 13, no. 6, pp. 1098–1105. (in Russian)
3. Vragov V.N. [On the Formulation and the Solvability of Boundary Value Problems for Mixed-Composite Type Equations]. *Matematicheskiy analiz i smejnie voprosi matematiki.* Novosibirsk, Nauka, 1978, pp. 5–13. (in Russian)
4. Terekhov A.N. [A Boundary Value Problem for Mixed Type Equation]. *Primenenie metodov funkstional'nogo analiza k zadacham matematicheskoi fiziki i vishislitel'noi matematiki.* Novosibirsk, IM SO AN SSSR, 1979, pp. 128–136. (in Russian)
5. Djuraev T.D. *Kraevie zadachi dlya uravnenia smeshannogo i smeshanno-sostavnogo tipov* [Boundary Value Problem for Equation of Mixed and Mixed-Composite Types]. Tashkent, FAN, 1979.
6. Moiseev E.I. *Uravneniya smeshannogo tipa so spektralnim parametrom* [Equations of Mixed Type with a Spectral Parameter]. Moscow, MSU, 1988.
7. Kuzmin A.G. *Neklasicheskie uravneniya smeshannogo tipa i ich prilozheniya k gazodinamike* [Non-Classical Equations of Mixed Type and the Application in the Gas dynamics]. Leningrad, LGU, 1990.
8. Egorov I.E., Fedorov V.E. *Neklassicheskie uravneniya matematicheskoy fiziki vysokogo poryadka* [High-Order Nonclassical Equations of Mathematical Physics]. Novosibirsk, Vychisl. tsentr SO RAN, 1995.
9. Egorov I.E., Fedorov V.E. [About a Boundary Value Problem for Mixed Type Equation of High Order]. *Matematicheskie zametki YaGU*, 1999, vol. 6, no. 1, pp. 26–35. (in Russian)
10. Chueshev A.B. *Razreshimost kraevikh zadach dlya uravnenii smeshannogo tipa visokogo poryadka* [The Solvability of Boundary Value Problems for Mixed Type Equations of High Order. The Dissertation of the Candidate Physical and Mathematical Sciences]. Novosibirsk, NGU, 2001.
11. Egorov I.E., Tikhonova I.M. [On Stationary Galerkin Methods for the Second Order Equation of Mixed Type] *Matematicheskie zametki YaGU*, 2010, vol. 17, no. 2, pp. 41–47. (in Russian)
12. Egorov I.E., Tikhonova I.M. [Application of the the Stationary Galerkin Method for a Mixed-Type Equation]. *Matematicheskie zametki YaGU*, 2012, vol. 19, no. 2, pp. 20–28. (in Russian)
13. Egorov I.E., Tikhonova I.M. [Application of the Modified Galerkin Method for a Mixed-Type Equation]. *Yakutian Mathematical Journal*, 2014, no. 4, pp. 14–19. (in Russian)
14. Tikhonova I.M., Fedorov V.E. [On One Boundary Value Problem for the Second Order Equation of Mixed Type]. *Matematicheskie zametki YaGU*, 2010, vol. 17, no. 2, pp. 19–21. (in Russian)

Received August 1, 2016