УДК 519.216.73, 519.248.33 DOI: 10.14529/mmp160406

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА КОШИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ: МОДЕЛИ, ПРИМЕРЫ, РЕШЕНИЯ

О.С. Старкова

Работа посвящена стохастической задаче Коши для нелинейного уравнения первого порядка со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве с мультипликативным шумом в некотором другом гильбертовом пространстве. В первую очередь в работе представлена модель временной структуры процентной ставки, которая является мерой текущего рынка облигаций. Случайность процесса, описывающего временные структуру цены облигации, обусловлена тем, что экономические показатели изменяются во времени и неизвестны заранее. Рассмотрены методы вычисления форвардной кривой, описывающей временную структуры цены облигации, и переход от них к решению задачи Коши указанного вида. Приведены условия на исходные отображения, необходимые для существования и единственности решения, и построены примеры отображений, удовлетворяющих этим условиям. Рассмотрены слабое и мягкое решения задачи Коши, приведены результаты существования и единственности мягкого решения, показана связь мягкого и слабого решений, из которой следует существование и единственность слабого решения задачи Коши.

Ключевые слова: стохастическая задача Коши; белый шум; винеровский процесс; слабое решение; мягкое решение; цена облигации; форвардная кривая.

Введение

Стохастические дифференциально-операторные уравнения, в том числе в абстрактных пространствах, возникают при моделировании различных явлений природы и человеческой деятельности, когда необходимо учитывать случайные воздействия на систему или наличие шума в самой моделируемой системе. В настоящей работе рассматривается задача Коши для уравнения первого порядка с оператором A, действующем в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве H и являющимся генератором полугруппы класса C_0 (см., например, [1–5]):

$$dX(t) = AX(t)\,dt + F(t,X)\,dt + B(t,X)\,dW(t), \quad t \in [0,T], T \leq \infty, \qquad X(0) = \zeta, \quad (1)$$

где $W(t)$ – винеровский процесс со значениями в некотором другом сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, $F(t,X)$ – отображение из H в H и $B(t,X)$ – оператор, действующий из H в пространство линейных операторов Гильберта – Шмидта $\mathcal{L}_{HS}(\mathbb{H}_Q, H)$.

В первую очередь в работе представлена модель [8], возникающая на фондовом рынке. Рассматриваемый рынок облигаций отличается от рынка ценных бумаг в одном фундаментальном аспекте: в то время, как рынок акций строится на конечном числе торгуемых активов, основополагающим базисом рынка облигаций является единая временная структура процентной ставки – бесконечномерная величина, которую невозможно наблюдать. Временная структура цены облигации сводится к задаче нахождения временной структуры процентной ставки или форвардной кривой, которая, в свою очередь, сводится к задаче (1).

Далее, для задачи (1) приведены условия на отображения A, F и B, необходимые для существования решения, и, что важно, построены примеры отображений, удовлетворяющие этим условиям. В заключении приведены результаты существования и единственности мягкого решения задачи Коши (см. [1, 2]), а также показана связь мягкого и слабого решений, из которой следует существование и единственность слабого решения.

1. Модели

Среди активно используемых на финансовом рынке ценных бумаг важное значение играют облигации с нулевым купоном или просто облигации. Владелец такой ценной бумаги имеет право получить в оговоренный срок T ее номинальную стоимость (принимаемую за единицу). Цена облигации в момент времени t обозначается $P(t,T)$. Таким образом, временная структура цены облигации $\{P(t,T),\ T \geq t\}$, подлежащая изучению в момент времени t (сегодня), является (с ростом T при фиксированном t) детерминированной, невозрастающей, положительной кривой с $P(t,t)=1$; при этом для фиксированного момента выплаты T процесс $P = \{P(t,T),\ t \leq T\}$ является стохастическим. Случайность процесса P обусловлена тем, что экономические показатели изменяются во времени и неизвестны заранее. Следует отметить, что в реальности стоимость облигации зависит еще и от некоторых дополнительных факторов, таких как, например, вероятность невыполнения обязательств эмитентом, но далее эти причины будут опущены.

Часто используемой информативной мерой текущего рынка облигаций в момент времени t является временная структура процентной ставки или форвардная кривая $\{f(t,T),\ T \geq t\}$, заданная следующим образом

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,s)\,ds\right). \tag{2}$$

Из равенства (2) следует, что форвардная кривая содержит всю изначальную информацию о цене облигации, которая может быть полностью восстановлена. Более того, кривая является важным показателем для центральных банков для установления денежной политики, тем не менее, в отличие от цены облигации, форвардная кривая представляет скорее математическую модель, нежели фактически наблюдаемую величину.

В короткий промежуток времени в окрестности $T = t$ по форвардной кривой может определяться краткосрочная процентная ставка

$$R(t) := f(t,t). \tag{3}$$

Это процентная ставка для займа на бесконечно малом интервале $[t-\Delta t, t]$ в момент времени t. Так как процесс $\{R(t),\ t \in \mathbb{R}_+\}$ измерим и интегрируем по t, то можно определить некоторый процесс

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t R(s)\,ds\right), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{4}$$

который можно трактовать как сумму, накопленную к моменту времени t, начиная с суммы равной единице в момент времени 0, с непрерывным начислением процентов по краткосрочной ставке $R(s)$, $s \in [0,t]$.

Поскольку форвардную кривую, необходимую при вычислении $P(t,T)$, нельзя наблюдать на фондовом рынке, необходимы методы ее вычисления. На практике применяется несколько алгоритмов вычисления текущей временной структуры процентной ставки на основе рыночных данных. Любой из применяемых методов может быть представлен как параметризованное семейство $\{G(\cdot,z),\ z\in\mathcal{Z}\}$ гладких кривых, где $\mathcal{Z}\subset\mathbb{R}^m$ – конечномерное множество параметров для некоторого $m\in\mathbb{N}$. При правильном выборе параметров $z\in\mathcal{Z}$ достигается оптимальное приближение форвардной кривой $G(x,z)\to G(x)=f(T-x,T)$, где $x=T-t$, к наблюдаемым данным.

Наиболее известными примерами, используемыми мировыми центральными банками, являются семейство Нельсона – Сигела с кривой вида [8]

$$G_{NS}(x,z)=z_1+(z_2+z_3x)e^{-z_4x} \tag{5}$$

и семейство Свенсона, как продолжение семейства Нельсона – Сигела,

$$G_S(x,z)=z_1+(z_2+z_3x)e^{-z_5x}+z_4e^{-z_6x}. \tag{6}$$

Другой подход к нахождению $f(t,T)$ представляет методология, описанная в работе [6]. Здесь для произвольного фиксированного $T\in\mathbb{R}_+$ форвардная кривая $f(t,T)$ ведет себя как процесс Ито с некоторыми функциями α, σ. В этом подходе форвардная кривая f ищется как решение уравнения

$$f(t,T)=f(0,T)+\int_0^t\alpha(a,T)\,ds+\int_0^t\sigma(s,T)\,dW(s),\quad t\in[0,T], \tag{7}$$

где W – конечномерное броуновское движение. Позже, на базе работы [6], репараметризации $r_t(x):=f(t,x+t)$ [7] и полугрупповой теории для стохастических уравнений в гильбертовых пространствах [1] в работе [8] предложен переход к решению задачи:

$$\begin{cases} dr(t) &= (Ar(t)+\alpha(t,r(t)))\,dt+\sigma(t,r(t))\,d\tilde{W}(t),\\ r_0 &= h_0,\end{cases} \tag{8}$$

где $\tilde{W}(t)$ – бесконечномерный винеровский процесс, оператор A – генератор полугруппы сдвига (вправо) $S(t)h(x)=h(x+t)$, то есть $Ah(x)=\partial_x h(x)$ для любой функции h из области определения оператора A. Коэффициенты $\alpha(t,r(t))$ и $\sigma(t,r(t))$ – некоторые отображения.

В настоящей работе рассмотрим решение дифференциально-операторных задач Коши типа (8), установим условия на A, α и σ, при которых решение существует и единственно, а так же приведем примеры операторов, удовлетворяющих этим условиям.

2. Нелинейное уравнение с мультипликативным шумом. Постановка задачи. Примеры операторов A, F и B

Пусть H, $\mathbb{H}$ – сепарабельные гильбертовы пространства, $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ – вероятностное пространство с нормальной фильтрацией $\mathcal{F}_t$, $t\geq 0$.

Будем рассматривать задачу Коши вида

$$\begin{cases} dX(t) = (AX(t) + F(t, X))\ dt + B(t, X)\, dW(t), \\ X(0) = \zeta, \end{cases} \tag{9}$$

которая является краткой записью интегрального уравнения

$$X(t) - \zeta = \int_0^t (AX(s) + F(s, X(s))\, ds + \int_0^t B(s, X(s))\, dW(s),$$

где X – искомый H-значный случайный предсказуемый процесс; ζ – $\mathcal{F}_0$-измеримая H-значная случайная величина; оператор $A : \text{dom } A \subset H \to H$ порождает полугруппу класса C_0; отображение $F(t, X(t)) : H \to H$; Q – неотрицательный оператор следа в $\mathbb{H}$, такой, что $Qe_j = \sigma_j^2 e_j$, $\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 < \infty$; оператор $B(t, X(t))$ – оператор Гильберта – Шмидта из пространства $\mathbb{H}_Q = Q^{\frac{1}{2}}\mathbb{H}$ (с нормой $\|h\|_{\mathbb{H}_Q} = \|Q^{-\frac{1}{2}}h\|_{\mathbb{H}}$) в пространство H, далее пространство операторов Гильбрета – Шмидта из $\mathbb{H}_Q$ в H будем обозначать $\mathcal{L}_{HS}$; $W(t)$, $t \geq 0$ – $\mathbb{H}$-значный Q-винеровский процесс.

При фиксированном $T > 0$ заданы следующие условия на коэффициенты A, F и B:

1) Отображение $F : [0, T] \times \Omega \times H \to H$, $(t, \omega, x) \to F(t, \omega; x)$ измеримо из $(\Omega_T \times H, \mathcal{P}_T \times \mathcal{B}(H))$ в $(H, \mathcal{B}(H))$.

2) Отображение $B : [0, T] \times \Omega \times H \to \mathcal{L}_{HS}$, $(t, \omega, x) \to B(t, \omega; x)$ измеримо из $(\Omega_T \times H, \mathcal{P}_T \times \mathcal{B}(H))$ в $(\mathcal{L}_{HS}, \mathcal{B}(\mathcal{L}_{HS}))$.

3) Существует такая константа $C > 0$, что $F(\cdot)$ и $B(\cdot)$ удовлетворяют условиям Липшица и линейного роста:

$$\begin{cases} \|F(t, \omega; x) - F(t, \omega; y)\|_H + \|B(t, \omega; x) - B(t, \omega; y)\|_{\mathcal{L}_{HS}} \leq C\|x - y\|_H, \\ \|F(t, \omega; x)\|_H^2 + \|B(t, \omega; x)\|_{\mathcal{L}_{HS}}^2 \leq C^2(1 + \|x\|_H^2), \end{cases} \tag{10}$$

где $x, y \in H$, $t \in [0, T]$, $\omega \in \Omega$ и $\mathcal{P}_T$ – предсказуемая σ-алгебра на $\Omega_T = [0, T] \times \Omega$.

Приведем примеры операторов A, B и F, удовлетворяющих условиям 1) – 3).

Как уже было отмечено ранее, примером оператора A, удовлетворяющего условиям задачи, может быть генератор полугруппы сдвига в пространстве $H = L_2(-\infty, \infty)$, то есть $A = \frac{\partial}{\partial x}$. Область определения оператора A – класс функций $f(\cdot)$ из $L_2(-\infty, \infty)$, производные которых также принадлежат $L_2(-\infty, \infty)$; тогда A – замкнутый линейный оператор с плотной областью определения. Изучим его спектр, для этого рассмотрим уравнение

$$\lambda f - f' = g, \quad f, g \in L_2(-\infty, \infty), \quad f \in \text{dom } A.$$

Так как

$$\lambda f = f' \Rightarrow f(x) = e^{\lambda x} f(0),$$

то точечный спектр оператора A пуст, следовательно, существует оператор обратный к оператору $\lambda I - A$. Воспользуемся преобразованием Фурье для решения неоднородного уравнения:

$$\tilde{f}(\sigma) = \frac{\tilde{g}(\sigma)}{\lambda - i\sigma} = \frac{\tilde{g}(\sigma)}{\text{Re } \lambda + i \text{ Im } \lambda - i\sigma},$$

так что число λ принадлежит резольвентному множеству, если его вещественная часть не равна нулю. С другой стороны, поскольку резольвентное множество должно быть открыто, мнимая ось является спектром оператора A. Следовательно, для $\lambda > 0$ (и для $\lambda < 0$)

$$\|R(\lambda; A)g\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{g}(\sigma)|^2}{(\mathrm{Re}\ \lambda)^2 + \sigma^2}\, d\sigma \leq \frac{\|\tilde{g}\|^2}{(\mathrm{Re}\ \lambda)^2} = \frac{\|g\|^2}{\lambda^2} \quad \Longrightarrow \quad \|R(\lambda; A)\| \leq \frac{1}{|\lambda|}.$$

Поскольку условия теоремы Хилле – Иосиды выполнены, оператор A порождает полугруппу сжимающих операторов.

Покажем еще один пример [9], для этого рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0,$$

функция $f(0, x)$ задана, $f(t, \cdot) \in L^2(-\infty, \infty)$ для всех $t \geq 0$. Рассмотрим случай, когда область определения оператора $A = \frac{\partial^2}{\partial^2 x}$ состоит из всех функций $f(\cdot)$ из $L^2(-\infty, \infty)$, для которых $f'(\cdot)$ и $f''(\cdot)$ принадлежат $L^2(-\infty, \infty)$. В частности, каждая такая функция удовлетворяет условиям $f(-\infty) = f(\infty) = 0 = f'(-\infty) = f'(\infty)$. Область определения оператора A плотна. По аналогии с предыдущим примером изучим спектр оператора A, для этого рассмотрим уравнение

$$\lambda f + f'' = g, \quad f, g \in L_2(-\infty, \infty), \quad f \in \mathrm{dom}\ A.$$

Так как

$$\lambda f = f'' \ \Rightarrow\ f(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda} x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda} x},$$

то точечный спектр оператора A пуст, следовательно, существует оператор обратный к оператору $\lambda I - A$. Преобразованием Фурье от неоднородного уравнения будет:

$$\tilde{f}(\sigma) = \frac{\tilde{g}(\sigma)}{\lambda + \sigma^2},$$

так что число λ принадлежит резольвентному множеству, если его вещественная часть не равна нулю. С другой стороны, поскольку резольвентное множество должно быть открыто, мнимая ось является спектром оператора A. Следовательно, для $\lambda > 0$

$$\|R(\lambda; A)g\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{g}(\sigma)|^2}{|\lambda + \sigma^2|^2}\, d\sigma \leq \frac{\|g\|^2}{\lambda^2} \quad \Longrightarrow \quad \|R(\lambda; A)\| \leq \frac{1}{|\lambda|}.$$

Таким образом, A порождает сжимающую полугруппу.

Пусть $\{e_i\}$, $\{g_i = \sqrt{\lambda_i} e_i\}$, $\{f_j\}$ – ортонормированные базисы в пространствах $\mathbb{H}$, $\mathbb{H}_Q$, H соответственно. Оператор $B(X)$ является оператором Гильберта – Шмидта из $\mathbb{H}_Q$ в H, так как норма оператора T – оператора Гильберта – Шмидта на паре некоторых гильбертовых пространств H_1, H_2 определяется как $\|T\|^2_{\mathcal{L}_{HS}(H_1,H_2)} = \sum_i \|T\alpha_i\|^2_{H_2}$, где α_i – базис в пространстве H_1, то

$$\|B(X)\|^2_{\mathcal{L}_{HS}} = \sum_i \|B(X)g_i\|^2_H.$$

Рассмотрим оператор $B(X) : \mathbb{H}_Q \to H$ вида

$$B(X)g_i = \sum_j b_{ij}(X)f_j, \sum_i b_{ij}^2 < \infty,$$

где в качестве отображения $b_{ij}(X)$ можно взять некоторую функцию от i-го коэффициента из разложения элемента X в ряд Фурье по базису в пространстве H, например, положим:

$$b_{ij} = \lambda_i \sin x_j, \quad \text{где } X = \sum_j x_j f_j, \sum_j x_j^2 < \infty \text{ и } \sum_i \lambda_i^2 < \infty.$$

Условие $\sum_i \lambda_i^2 < \infty$ является достаточным, чтобы оператор $B(X)$ был оператором Гильберта – Шмидта:

$$\|B(X)\|^2_{\mathcal{L}_{HS}} = \sum_i \|B(X)g_i\|^2_H = \sum_i \sum_j b_{ij}^2(X) = \sum_{ij} \lambda_i^2 \sin^2 x_j \leq \sum_i \lambda_i^2 < \infty.$$

Проверим условие Липшица:

$$\|B(X) - B(Y)\|^2_{\mathcal{L}_{HS}} = \sum_i \|(B(X) - B(Y))g_i\|^2_H = \sum_i \sum_j (b_{ij}(X) - b_{ij}(Y))^2 =$$

$$= \sum_{ij} \lambda_i^2 (\sin x_j - \sin y_j)^2 = \sum_{ij} \lambda_i^2 \, 4 \sin^2 \left(\frac{x_j - y_j}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{x_j + y_j}{2} \right) \leq$$

$$\leq \sum_{ij} \lambda_i^2 (x_j - y_j)^2 \leq C\|X - Y\|^2_H$$

и условие линейного роста:

$$\|B(X)\|^2_{\mathcal{L}_{HS}} = \sum_i \|B(X)g_i\|^2_H = \sum_i \sum_j b_{ij}(X)^2 = \sum_i \sum_j \lambda_i^2 \sin^2 x_j \leq C(1 + \|X\|^2_H).$$

Аналогично, в качестве примера $F(X) : H \to H$ возьмем

$$F(X)g_i = \sum_j a_j(X)f_j, \text{ где } a_j = \sin x_j.$$

Условия Липшица

$$\|F(X) - F(Y)\|^2_H = \sum_j (a_j(X) - a_j(Y))^2 = \sum_j (\sin x_j - \sin y_j)^2 =$$

$$= \sum_j 4 \sin^2 \left(\frac{x_j - y_j}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{x_j + y_j}{2} \right) \leq \sum_j (x_j - y_j)^2 \leq C\|X - Y\|^2_H$$

и линейного роста

$$\|F(X)\|^2_H = \sum_j a_j(X)^2 = \sum_j \sin^2 x_j \leq C(1 + \|X\|^2_H)$$

выполняются.

Из приведенных оценок следует выбор коэффициентов a, b таким образом, что они удовлетворяют условиям 1) – 3): в качестве функций b_{ij} и a_j берем такие, что $\sum_j b_{ij}^2 < \infty$ и $\sum_j a_j^2 < \infty$, и вместо функций $\sin x_j$ можно взять любые функции, удовлетворяющие условиям Липшица и линейного роста.

3. Слабое и мягкое решения задачи Коши

Предсказуемый H-значный процесс $X(t)\, t \in [0,T]$ называется *слабым решением* задачи Коши (9), если

$$\mathbf{P}\left(\int_0^t \|X(s)\|^2\, ds \leq +\infty\right) = 1 \tag{11}$$

для почти всех ω, для любого $t \in [0;T]$ и для любого $y \in \operatorname{dom} A^*$ справедливо равенство

$$\langle y, X(t)\rangle = \langle y, \zeta\rangle + \int_0^t \left[\langle A^* y, X(s)\rangle + \langle y, F(s, X(s))\rangle\right] ds + \int_0^t \langle y, B(s, X(s))\rangle\, dW(s). \tag{12}$$

Предсказуемый H-значный процесс $X(t)\, t \in [0,T]$ называется *мягким решением* задачи Коши (9), если выполнено (11) и $X(t)$ для любого $t \in [0;T]$ удовлетворяет уравнению

$$X(t) = S(t)\zeta + \int_0^t S(t-s) F(s, X(s))\, ds + \int_0^t S(t-s) B(s, X(s))\, dW(s). \tag{13}$$

Теорема 1. *Пусть ζ – $\mathcal{F}_0$-измеримая H-значная случайная величина и условия $1) - 3)$ выполнены. Тогда существует мягкое решение X задачи (9), единственное с точностью до эквивалентности среди процессов, удовлетворяющих условию (11).*

Доказательство теоремы приведено в [1] и основано на принципе сжимающих отображений для интегрального уравнения.

Покажем, что мягкое и слабое решения совпадают, тогда условия существования мягкого решения являются достаточными условиями существования слабого решения.

Теорема 2. *Пусть X – H-значный предсказуемый процесс с интегрируемыми траекториями, оператор $A : \operatorname{dom} A \subset H \to H$ – генератор полугруппы класса C_0, оператор $F(s, X(s))$ – отображение из H в H, оператор $B(s, X(s))$ удовлетворяет условию существования интеграла Ито, то есть $E\int_0^t \|S(t-s)B(s,X(s))\|^2_{\mathcal{L}_{HS}(\mathbb{H}_Q, H)}\, ds < \infty$. Если для любого $t \in [0,T]$ и $y \in \operatorname{dom} A^*$ решение $X(t)$ удовлетворяет равенству (12), тогда X удовлетворяет равенству (13). Обратное также верно.*

Доказательство. Доказательство проведем по схеме доказательства единственности решения для задачи с аддитивным шумом.

Сначала докажем, что слабое решение является мягким. Пусть X – слабое решение, то есть удовлетворяющее (12).

Единственным решением однородного уравнения

$$\langle y, X(t)\rangle = \langle y, \zeta\rangle + \int_0^t \langle A^* y, X(s)\rangle\, ds \tag{14}$$

является процесс $X(t) = S(t)\zeta$, $t \in [0,T]$. Таким образом, процесс (14) является мягким решением при $B = 0$ и $F = 0$. Поэтому без ограничения общности положим $\zeta = 0$.

Теперь для любой функции $y(\cdot) \in C^1([0,T]; \mathrm{dom}\ A^*)$ и $t \in [0,T]$, при использовании формулы Ито, имеет место равенство

$$\langle y(t), X(t)\rangle = \int_0^t \langle y(s), F(s, X(s))\rangle\, ds + \int_0^t \langle y(s), B(s, X(s))\, dW(s)\rangle +$$
$$+ \int_0^t \langle y'(s) + A^* y, X(s)\rangle. \quad (15)$$

Так как X – слабое решение и $y_0 \in \mathrm{dom}\ A^*$, применяя равенство (15) к функции $y(s) = S^*(t-s)y_0$, получим

$$\langle y_0, X(t)\rangle = \int_0^t \langle y_0, S(t-s)F(s, X(s))\rangle\, ds + \langle y_0, \int_0^t S(t-s)B(s, X(s))\, dW(s)\rangle. \quad (16)$$

Отсюда, в силу плотности множества dom A^* в H и невырожденности полугруппы, получаем, что процесс $X(t)$ удовлетворяет (13).

Для доказательства равенства (15) сначала рассмотрим функции вида $y = y_0\varphi(s)$, $s \in [0,t]$, где $\varphi \in C^1([0,t])$, $y_0 \in \mathrm{dom}\ A^*$ и, следуя [1], определим процесс

$$\mathcal{G}(t, X) = \int_0^t \langle A^* y_0, X(s)\rangle\, ds + \int_0^t \langle y_0, F(s, X(s))\rangle\, ds + \int_0^t \langle y_0, B(s, X(s))\, dW(s)\rangle.$$

Учитывая, что $dX(t) = (AX(t) + F(t,X))\ dt + B(t,X)\, dW(t)$, применим формулу Ито к процессам $\mathcal{G}(t,X)$ и $\mathcal{G}(t,X)\varphi(t)$; принимая во внимание, что первая производная Фреше по x функции $\mathcal{G}$ является отображением из H в $\mathbb{R}$, вторая производная – из H в H и $(dX)^2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left[\left(B(t,X)Q^{\frac12}\right)\left(B(t,X)Q^{\frac12}\right)^*\right] dt$ (см., например, [1, 2]), получим:

$$\begin{aligned} &d\mathcal{G}(t) = \mathcal{G}_t(t,X)dt + \mathcal{G}_x(t,X)dX + \mathcal{G}_{xx}(t,X)(dX)^2 = \mathcal{G}_t(t,X)dt + \\ &+\langle \mathcal{G}_x(t,X), B(t,X)dW(t)\rangle + \langle \mathcal{G}_x(t,X), AX\rangle dt + \langle \mathcal{G}_x(t,X), F(t,X)\rangle dt + \\ &+\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left[\mathcal{G}_{xx}(t,X)\left(B(t,X)Q^{\frac12}\right)\left(B(t,X)Q^{\frac12}\right)^*\right] dt; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} &d[\mathcal{G}\varphi](t) = \varphi(t)\mathcal{G}_t(t,X)dt + \varphi'(t)\mathcal{G}(t,X)dt + \varphi(t)\langle \mathcal{G}_x(t,X), B(t,X)dW(t)\rangle + \\ &+\varphi(t)\langle \mathcal{G}_x(t,X), AX\rangle dt + \varphi(t)\langle \mathcal{G}_x(t,X), F(t,X)\rangle dt + \\ &+\tfrac{1}{2}\varphi(t)\,\mathrm{Tr}\left[\mathcal{G}_{xx}(t,X)\left(B(t,X)Q^{\frac12}\right)\left(B(t,X)Q^{\frac12}\right)^*\right] dt. \end{aligned} \quad (18)$$

В результате из равенства (15) и разложений (17), (18) получим

$$\begin{aligned} &d[\mathcal{G}\varphi](t) = \varphi(t)\, d\mathcal{G}(t,X) + \varphi'(t)\mathcal{G}(t,X)\, dt = \\ &= \varphi(t)\left(\langle X(t), A^* y_0\rangle\, dt + \langle y_0, F(t, X(t))\rangle\, dt + \langle B(t, X(t))\, dW(t), y_0\rangle\right) + \\ &+\varphi'(t)\left(\textstyle\int_0^t \langle A^* y_0, X(s)\rangle\, ds + \int_0^t \langle y_0, F(s, X(s))\rangle\, ds + \int_0^t \langle y_0, B(s, X(s))\, dW(s)\right). \end{aligned}$$

Отсюда, для функций $y(t) = y_0\varphi(t)$ получим

$$\mathcal{G}(t,X)\varphi(t) = \int_0^t \varphi(s)\big(\langle A^* y_0, X(s)\rangle + \langle y_0, F(s, X(s))\rangle + \varphi'(s)\langle y_0, X(s)\rangle\big)\, ds +$$
$$+ \int_0^t \langle y(s), B(s, X(s))\, dW(s)\rangle.$$

В силу равенства $\mathcal{G}(t, X) = \langle y_0, X(t)\rangle$ для п.в. ω, утверждение доказано для функций вида $y(t) = y_0\varphi(t)$. Из того, что линейные комбинации этих функций плотны в пространстве $C^1([0,\tau]; \mathrm{dom}\ A^*)$, следует равенство (15) в общем случае.

Теперь докажем обратное, то есть, что мягкое решение является слабым. Пусть $y \in \mathrm{dom}\ A^*$, тогда из свойств $S^*(t)$ и непрерывности скалярного произведения имеем

$$\int_0^t \langle A^*y, \int_0^s S(s-r)F(r,X)\,dr + \int_0^s S(s-r)B(r,X)\,dW(r)\rangle\,ds =$$
$$= \int_0^t \int_0^s \langle A^*y, S(s-r)F(r,X)\,dr + S(s-r)B(r,X)\,dW(r)\rangle\,ds =$$
$$= \int_0^t \int_0^s \langle S^*(s-r)A^*y, F(r,X)\,dr + B(r,X)\,dW(r)\rangle\,ds =$$
$$= \int_0^t \langle \int_0^{t-r} S^*(s)A^*y\,ds, F(r,X)\,dr + B(r,X)\,dW(r)\rangle =$$
$$= \int_0^t \langle S^*(t-r)y - y, F(r,X)\,dr + B(r,X)\,dW(r)\rangle =$$
$$= \int_0^t \langle y, S(t-r)F(r,X)\,dr + S(t-r)B(r,X)\,dW(r)\rangle - \int_0^t \langle y, F(r,X)\,dr + B(r,X)\,dW(r)\rangle =$$
$$= \langle y, \int_0^t S(t-r)F(r,X)\,dr\rangle + \langle y, \int_0^t S(t-r)B(r,X)\,dW(r)\rangle -$$
$$- \langle y, \int_0^t F(r,X)\,dr\rangle - \langle y, \int_0^t B(r,X)\,dW(r)\rangle.$$

Таким образом, процесс $X(t) = S(t)\zeta + \int_0^t S(t-s)F\,ds + \int_0^t S(t-s)B\,dW(s)$ является слабым решением. $\square$

Отметим, что с учетом теоремы 1, это доказательство является, в том числе, доказательством существования и единственности слабого решения.

Работа проводилась при финансовой поддержке РФФИ, проект № 13-01-00090, и программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

Литература / References

1. Da Prato G., Zabczyk J. *Stochastic Equations in Infinite Dimensions.* Cambridge Univ. Press, 1992. DOI: 10.1017/CBO9780511666223
2. Gawarecki L., Mandrekar V. *Stochastic Differential Equations in Infinite Dimensions.* Berlin, Heidellberg, Springer-Verlag, 2011. DOI: 10.1007/978-3-642-16194-0
3. Melnikova I.V. Filinkov A.I., Anufrieva U.A. Abstract Stochastic Equations I. Classical and Distributional Solutions. *Journal of Mathematical Sciences*, 2002, vol. 111, no. 2, pp. 3430–3465. DOI: 10.1023/A:1016006127598
4. Melnikova I.V., Filinkov A.I. Abstract Stochastic Problems with Generators of Regularized Semigroups. Journal of Communications in Applied Analysis, 2009, vol. 13, no. 2, pp. 195–212.

5. Alshanskiy M.A., Melnikova I.V. Regularized and Generalized Solutions of Infinite-Dimensional Stochastic Problems. *Sbornik: Mathematics*, 2011, vol. 202, no. 11, pp. 1–28. DOI: 10.1070/SM2011v202n11ABEH004199
6. Heath D., Jarrow R., Morton A. Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation. *Econometrica*, 1992, vol. 60, no. 1, pp. 77–105. DOI: 10.2307/2951677
7. Musiela M. Stochastic PDEs and Term Structure Models. *Journees Internationales de France*, IGR-AFFI, La Baule, 1993.
8. Filipovic D. *Consistency Problems for Heath – Jarrow – Morton Interest Rate Models.* Berlin, Heidellberg, Springer, 2001.
9. Balakrishnan A.V. *Applied Functional Analysis.* Berlin, Heidellberg, Springer, 1976.

Ольга Сергеевна Старкова, научный сотрудник лаборатории «Аппроксимация и навигация» при кафедре «Математический анализ и теория функций», Уральский федеральный университет (г. Екатеринбург, Российская Федерация), olga-n4@yandex.ru.

Поступила в редакцию 7 июля 2015 г.

MSC 60H15, 60H30 **DOI: 10.14529/mmp160406**

STOCHASTIC CAUCHY PROBLEM IN HILBERT SPACES: MODELS, EXAMPLES, SOLUTIONS

O.S. Starkova, Ural Federal University, Ekaterinburg, Russian Federation, olga-n4@yandex.ru

The paper is concerned with the stochastic Cauchy problem for nonlinear first order equation with values in a separable Hilbert space and with multiplicative noise in some other Hilbert space. First, a model of the term structure of interest rate that is a measure of the current bond market is represented. Stochastic behavior of the process describing a temporary bond price structure is caused by the fact that the economic indicators change in time and are not known in advance. We consider methods of calculating the forward curve, which describes the temporal structure of the bond price, and the transition from these methods to the solution of the Cauchy problem of mentioned type. Secondly, we show conditions on initial mappings which are necessary for existence and uniqueness of solution and build examples of mappings satisfying these conditions. We construct weak and mild solutions, show the results of existence and uniqueness of mild solution and the relationship of soft and weak solutions, which implies the existence and uniqueness of a weak solution of the Cauchy problem.

Keywords: stochastic Cauchy problem; white noise; Wiener process; weak solution; mild solution; bond price; forward curve.

Received July 7, 2015